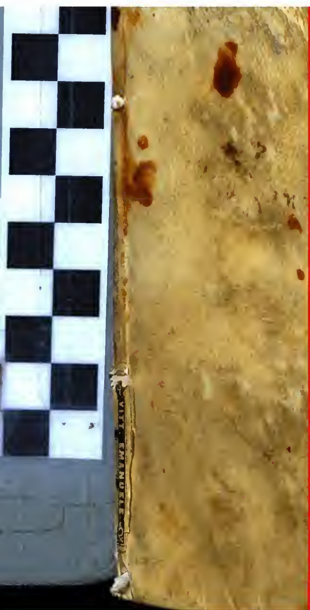
image
not
available


VITT. EMANUELE


VITT. EMANUELE


NAZIONALE
BIBLIOTECA
VITT. EMANUELE
12
33 A
34



I PRIMI
SEI LIBRI
D'EVCLIDE.



I PRIMI
SEI LIBRI
D'EVCLIDE
TRATTI
IN VOLGARE.

DEDICATI

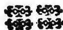
ALL' ILL.^{MO} SIG.^{R} CONTE

VITALIANO
BORROMEO

Generale dell'Artiglieria, e del Conseglio Segreto di S. M. Cattolica, e Commessario Imperiale della Maestà dell' Imperatore in Italia.







IN MILANO,

Nella Stampa di Lodouico Monza. 1671.
Con licenza de' Superiori, e Priuilegio.



ILL.MO SIGNORE.

EGLI è gran tempo che da molti Soldati, che la mia Libreria frequentano, veggo disiderarsi le opere d' Euclide in forma, e spiegazione più acconcia all'vso, & all' intelligenza militare. Entrato però in disiderio di sodisfarli, io aueua prima disposto di supplicare per tal opera il Sig. Pietro Paolo Carauaggi Professore delle scienze Matematiche in queste Scuo-

le

le Palatine, il cui nome è oramai celebre per tutta l'Europa. Ma riconoſcendo poi non eſſer ciò materia degna de' ſuoi più graui ſtudij, ne comportabile alle ſue molte occupazioni, hò riuolto l'animo al Sig. Pietro Paolo ſuo figliuolo, il quale, benche non paſſi ancora l'età d'anni dodeci, hà però così ben fornita l'impreſa, ch'io ardiſco di ſtimare queſta ſua primizia non leggiere argomento delle grandi ſperanze, che dalla ſua educazione, e dal ſuo ingegno ſi ponno ritrarre. Mando adunque alla luce vn' Euclide volgarizato, e ridotto a forma, breuità, e

chia-

chiarezza molto più atta all' vſo de' Soldati, che per la militare architettura vorranno valerſene. Et auendo io oſſeruato, che di coloro, che ciò mi richiedeano, i più hanno militato nel terzo di V. S. Illuſtriſſima, & hanno da lei appreſo, che il miglior vantaggio della forza è la condotta del ſapere, quindi hò preſo ardire di dedicare a lei queſt' opera, che pure dalla ſua ſapientiſſima prouidenza hà preſe le prime cagioni. Entrar io nelle ſue lodi ſarebbe più toſto ſtimata temerità della mia penna, che deuozione del mio cuore, e però rimanendo con la confi-

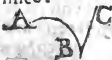
dan-

DE GLI ELEMENTI D'EVCLIDE

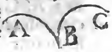
LIBRO PRIMO.

DIFFINIZIONI.

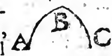
1. IL punto è vn ſegno inteſo ſenza parte, o grandezza.
2. La linea è vna lunghezza inteſa ſenza larghezza.
3. I fini della linea ſono i punti.
4. La linea retta è quella, che ſi diſtende vgualmente frà li ſuoi punti.
5. La ſuperficie s' intende auere ſolamente lunghezza, e larghezza.
6. I fini della ſuperficie ſono le linee.
7. La ſuperficie piana è quella, che ſi diſtende vgualmente frà le ſue linee.



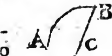
8. L'angolo piano A B C è quella inclinazione, che fanno due linee AB, e CB, che in vn pũto B ſi toccano, ne ſono poſte dirittamente frà loro, e ſi nota con trè lettere, la ſeconda delle quali è quella, che ſegna il punto del contatto.





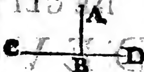


9. Quando le linee, che contengono l'angolo, ſono rette, ſi chiama tal angolo rettilineo, gli



altri curuilinei, o mistilinei.

10. Quando la linea retta AB stando sopra vn' altra retta CD fà gli angoli da' lati detti susseguenti, ABC, ABD frà loro vguali; sono amendue retti, e la linea AB, che stà sopra, si chiama perpendicolare alla CD, alla quale ella soprasta.



11. L'angolo ottuso ABC è quello, che è maggior del retto.



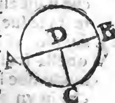
12. L'angolo acuto DEF è quello, che è minore del retto.



13. Il termine, è fine, o stremità di qualche cosa.

14. La figura è quella, che è contenuta da vno, o da più termini.

15. Il cerchio è vna figura piana contenuta da vna linea ABC, che si chiama circonferenza, alla quale quante linee rette peruengono tirate da vn punto D, che è dentro la figura, tutte frà loro sono vguali.

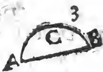


16. E questo tal punto D si dimanda centro del cerchio.

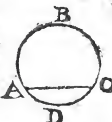
17. Il diametro del cerchio AB è vna linea retta, che passa per lo centro D, e dall' vna, e l'altra parte è terminata dalla circonferenza, e diuide eziandio il cerchio per mezzo.

18.

18. Il mezzo cerchio ACB è vna figura contenuta dal diametro AB, e dalla metà della circonferenza.



19. La porzione del cerchio è vna figura contenuta da vna linea retta, e da parte della circonferenza, & è maggiore ABC, o minore AEC.



20. Le figure contenute da linee rette si chiamano rettilinee.



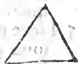
21. Quelle, che sono contenute da tre linee, si dicono trilatere.

22. Se da quattro, quadrilatere.

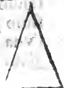


23. Se da più di quattro, moltilatere.

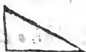
24. Delle figure trilatere il triangolo equilatero è quello, che hà trè lati vguali.



25. L'Isoscele, ouero equicrure, che hà solamente due lati vguali.



26. Lo Scaleno, che hà tutti trè i lati disuguali.



27. Oltre di ciò delle figure trilatere il triangolo rettangolo è quello, che contiene in se vn' angolo retto.



28. L'ottusiangolo, che contiene vn' angolo ottuso.



29. L'acutiangolo, che hà tutti trè gli angoli acuti.



30. Delle figure quadrilatere il quadrato è quello, che è equilatero, e rettangolo.

31. La figura dall' vna parte più lunga è quella, che è rettangola, ma non equilatera.

32. Il Rhombo è vna figura equilatera, ma non rettangola.

33. Il Rhomboide è vna figura, che hà i lati, e gli angoli opposti frà loro vguali, ma non è equilatera, ne rettangola.

34. Trapezij sono tutte l' altre figure quadrilatere oltre di queste.

35. Linee paralelle, o equidistanti sono quelle, che essendo in vn medesimo piano, e prolungate in infinito dall' vna, e l' altra parte, non si vniscono giammai insieme.

Postulati, o Dimande.

1. SI dimanda potere da qual si voglia, a qual si voglia punto tirare vna linea retta.

2. Prolungare vna linea retta terminata in diritto.

3. Con qual si voglia centro, ed interuallo descriuere vn cerchio.

4. Tutti gli angoli retti essere vguali fra loro.

5. La

5. Se sopra due rette linee cadendo vna retta farà gli angoli interiori, e da vna medesima parte minori di due retti, quelle linee prolungate in infinito congiungersi insieme da quella parte, oue sono gli angoli minori di due retti.



Assiomi, ouero notizie vniuersali.

1. LE cose vguali ad vna medesima, sono fra loro vguali.
2. Se alle cose vguali s'aggiungono cose vguali, tutte sono vguali fra di loro.
3. Se dalle cose vguali si sottraggono cose vguali, le rimanenti sono vguali fra loro.
4. Se alle cose disuguali s'aggiungono cose vguali, tutte sono disuguali.
5. Se dalle cose disuguali si sottraggono cose vguali, le rimanenti sono disuguali.
6. Le cose, che sono doppie di vna medesima, sono vguali frà loro.
7. Le cose, che sono la metà d'vna medesima, sono frà loro vguali.
8. Quelle cose, che conuengono, e s'adattano bene insieme, sono vguali.
9. Il tutto è maggiore della sua parte.
10. Due linee rette non comprendono spazio alcuno.

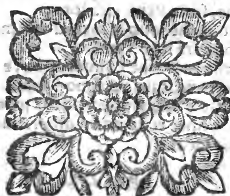


AL LETTORE.

Auuertasi, che per mantenere la breuità abbiamo vnite alcune parti della dimostrazione. Come la Proposizione, Esposizione, e Determinazione; in modo però, che la breuità non pregiudichi alla chiarezza, ed alla Dottrina.

Le citazioni s'esprimono come siegue.

1. d. 15.	libro pr. diffinizione 15.
3. d. 7.	libro 3. diffinizione 7.
pos. 3.	postulato 3.
as. 8.	assioma, ò notizia vniuersale 8.
1. pr. 18.	libro pr. proposizione 18.
3. pr. 11.	libro 3. proposizione 11.
ante.	per l'antecedente.
cor.	significa corollario.
1. cor. pr. 15.	significa libro pr. corollario della proposizione decima quinta.

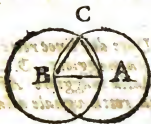


Pro-

PROBLEMA PRIMO.

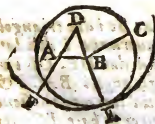
Proposizione Prima.

Sopra la data linea retta terminata AB constituire vn triangolo equilatero.



CO' centri A, & B, e con l' interuallo AB si descriuono due cerchi, che si taglino in C, al qual punto tirate le linee AC, e BC saranno vguali alla medesima AB per essere dal cētro alla circonferenza; perciò saranno ancora frà di loro vguali, ed il triangolo ACB sarà equilatero, il che si douea fare. *pos. 3.* *pos. 1.* *1.d.15* *as. 1.* *1.d.24*

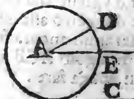
Probl. 2. Propos. 2. Dal punto A tirare vna linea retta vguale alla retta data BC.



SI tiri la linea AB, sopra la quale si constituisca il triangolo equilatero ABD, e col centro B, ed interuallo BC si descriua vn cerchio, alla circonferenza, del quale in E si proroghi la linea DB, e col centro D interuallo DE si de- *pos. 1.* *ant.* *pos. 3.* *pos. 2.* *pos. 3.*

descriua vn'altro cerchio alla circonferenza; del quale in F si produca la linea DA. Perche le linee DE, e DF sono trà loro vguali, traendone le vguali DA, e DB, saranno le rimanenti AF, e
as. 3. BE vguali; ma BE è vguale a BC.
as. 1. Adunque AF sarà vguale a BC, il che si doueua fare.

Probl. 3. Propos. 3. Date due linee rette, delle quali AB sia maggiore, & C minore, bisogna dalla maggiore AB tagliare vna linea retta vguale alla minore C.



ante. AL punto A si ponga la AD vguale alla C, e col cêtro A interuallo AD si descriua
pos. 3. vn cerchio, il quale taglierà dalla AB la parte AE vguale
1. d. 15 alla AD, e perciò vguale alla C, il che
as. 1. si doueua fare.

Theor. 1. Propos. 4. Se i due triangoli ABC, DEF haueranno i due lati AB, AC vguali a' due DE, DF l'vno all'altro, e gli angoli BAC, & EDF contenuti da' lati vguali siene vguali. Dico ancor la base BC esser vguale alla base EF, ed il triangolo ABC vguale al triangolo DEF, e gli altri angoli vguali a gli altri angoli

l'vno

all'altro, a' quali sono sottoposti i lati vguali, cioè l'angolo ABC all'angolo DEF, e l'angolo ACB all'angolo DFE.



PErcioche intendendosi adattato il triangolo ABC al triangolo DEF, e posto il punto A sopra il punto D, & il lato AB sopra DE, ancora il punto B s'adatterà al punto E, altrimenti la AB non sarebbe vguale alla DE, eziandio la retta AC s'adatterà alla DF, essendo gli angoli BAC, & EDF vguali, ed il punto C s'adatterà al punto F, altrimēti AC non sarebbe vguale alla linea DF. ma perche B si adattaua ad E, ancora la base BC si adatterà alla base EF, altrimenti caderebbe o di sopra, o di sotto, e così due linee rette comprenderiano spazio, il che è impossibile; adunque vn triangolo s'adatterà all' altro, e perciò saranno vguali. Il che si douea dimostrare. *as. 8.* *as. 10.* *as. 8.*

Theor. 2. Propos. 5. Il triangolo ABC Isoscele abbia i lati AB, & AC vguali. Dico, che ancora gli angoli alla base ABC, & ACB saranno vguali, e prodotti i lati vguali AB in E, & AC in D, gli angoli sotto la base EBC, & DCB saranno vguali.

1.pr.3. 

FAcciasi AE vguale alla AD, e tirinsi le linee BD, ed EC. I due triangoli ABD, & ACE aueranno le proprietà poste nella quarta proposizione, cioè i due lati AB, AD saranno vguali à' due AC, AE l'vno all'altro, e l'angolo contenuto vguale essendo il medesimo; adunque ancora la base BD sarà vguale alla base EC, e l'angolo ABD vguale all'angolo ACE, e l'an-
1.pr.4. golo ADB vguale all'angolo AEC. Similmēte se da gli vguali lati AE,& AD si leueranno gli vguali AB, ed AC, i ri-
as.3. manenti BE, e CD saranno vguali; ma sono stati dimostrati vguali i lati EC, e BD, e gli angoli BEC, e BDC; adunque saranno i triangoli BEC, e BCD
1.pr.4. vguali, e perciò vguali gli angoli sotto la base EBC, e DCB, che è vna parte della proposizione, che si douea dimostrare. Similmente saranno vguali gli angoli DBC, ed ECB, i quali leuati da gli angoli ABD, ed ACE dimostrati vguali lascieranno gli angoli sopra la
as. 3. base ABC. ed ACB frà di loro vguali, che è l'altra parte della proposizione, che si douea dimostrare.



Theo-

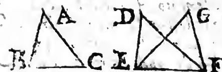
Theor. 3. Propos. 6. Se il triangolo ABC auerà gli angoli ABC, & ACB vguali, saranno ancora vguali i lati AC, & AB a detti angoli opposti.

Suppongasi il lato AC maggiore, e si leui la CD vguale ad AB, il triangolo ABC auerà i due lati AB, e BC vguali a' due DC, e CB del triangolo DCB, e l'angolo ABC è vguale all'angolo DCB; adunque aueranno le proprietà accennate nella quarta proposizione: perciò sarà vguale il triangolo DBC al triangolo ACB la parte al tutto, il che è impossibile, adunque è impossibile, che il lato AC sia maggiore del lato CB, adunque saranno vguali, il che &c. 1.pr.3. 1.pr.4. as. 9.

Theor. 4. Propos. 7. Nella medesima linea AB essendo constituite due linee rette AC, e BC, che si vniscano nel punto C non è possibile constituirne due altre dalla medesima parte, come per essempio AD, e BD, che abbiano i medesimi termini AB, e si vniscano ad vn'altro punto, per essempio D, di modo, che la AC sia vguale alla AD, che ha il medesimo termine B, e la BC sia vguale alla BD, che ha il medesimo termine B.

pos. 1. SVppongasi, che sieno vguali, e si tiri la CD: perche AC, e CD si dicono vguali
1.pr.5. sarà l'angolo ACD vguale all'angolo ADC; ma l'angolo ADC è minore dell'angolo BDC; adunque l'ango-
as. 9. lo ACD sarà minore dell'angolo BDC, ma l'angolo ACD è maggiore dell'angolo BCD; adunque l'angolo BCD sarà molto più minore dell'angolo BDC; ma se per la suppofizione BC fosse vguale à BD, sarebbe l'angolo
1.pr.5. BCD vguale all'angolo BDC; ma è stato dimostrato molto minore; ed essere vguale, e minore è impossibile; adunque è impossibile che si possano tirare le sudette linee nel sudetto modo.

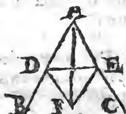
Theor. 5. Propos. 8. Sieno due triangoli ABC, DEF, & il lato AB del primo sia vguale al lato DE, & AC al lato DF del secondo, e la base BC vguale alla base EF. Dico ancor l'angolo BAC essere vguale all'angolo EDF.



PErcioche intendendosi il triangolo ABC soprapostto al triangolo DEF, ed il punto B sopra E, e la linea retta

retta BC sopra la EF, il punto C caderà sopra il punto F, e così ancora la BA, & AC caderanno sopra le DE, & EF; imperoche è impossibile, che cadano altroue, come per essempio al punto G, di modo, che EG sia vguale alla ED, e FG alla FD per l'antecedente; adunque cadendo nello stesso punto s'adatterà la linea BA alla ED, e la CA alla FD, e l'angolo BAC all'angolo EDF, adunque sarà vguale, il che si douea dimostrare. *as. 8.* *1. pr. 7.* *as. 8.*

Probl. 4. Propos. 9. Diuidere il dato angolo rettilineo BAC per mezzo.



PIglisi nella linea AB qual si voglia punto D, e taglisi la AE vguale alla AD, e tirata la DE sopra d'essa si faccia il triangolo equilatero DEF, e tirisi la linea AF; i due triangoli DAF, ad EAF aueranno i due lati DA, & AF vguali a' due AE, ed AF, e la base DF alla base EF; adunque per l'antecedente sarà l'angolo DAF vguale all'angolo EAF, e così l'angolo BAC sarà diuiso per mezzo dalla linea AF, il che si douea fare. *1. pr. 3.* *1. pr. 1.* *pos. 1.*

***

Pro-

Probl. 5. Prop. 10. Diuidere la data retta linea terminata AB per mezzo.

A B D C

1.pr.1. SI faccia sopra AB il triangolo equilatero ABC, e si diuida l'angolo ACB per mezzo con la linea CD per l'antecedente. I due triangoli ACD, e BCD aueranno le proprietà della quarta, cioè AC vguale a CB, e la CD comune, e gli angoli contenuti da' lati vguali similmente vguali, adunque la base
1.pr.4. AD sarà vguale alla base DB, e la linea AB sarà diuisa per mezzo dalla linea CD, il che si doueua fare.

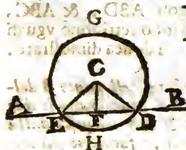
Probl. 6. Propos. 11. Dal punto dato C nella data retta AB alzare vna perpendicolare alla AB.

F A D C E B

PIglisi nell'AC qual si voglia punto D, ed alla CD si
1.pr.3. faccia vguale la CE, e sopra
1.pr.1. DE si faccia il triangolo equilatero
pos. 1. DEF, e tirisi la FC; il triangolo FCD auerà i due lati FC, e CD, e la base FD vguali a' due lati FC, e CE, ed
1.pr.8. alla base FE del triangolo FCE; adunque l'angolo FCD sarà vguale all'angolo

golo FCE, e perciò saranno retti, e la linea FC sarà perpendicolare alla AB nel punto C, il che si douea fare. 1.d.10

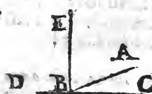
Probl. 7. *Propos.* 12. *Sopra vna data retta linea indeterminata AB, da vn punto C fuori di essa far cadere vna perpendicolare.*



Fatto centro C con tal interuallo si descriua vn cerchio, che tagli la linea AB ne' punti E, & D, e diuidasi la ED in due parti vguali in F, & tirata la CF questa sarà la perpendicolare ricercata; imperoche tirate le linee CE, & CD saranno fatti due triangoli CFE, & CFD, che aueranno i due lati CF, & FE vguali a' due CF, & FD, e la base CE vguale alla base CD; adunque ancora l'angolo CFE sarà vguale all' angolo CFD, perciò la linea CF sarà perpendicolare alla AB, il che si douea fare. pos. 3. 1. pr. 10. pos. 1. 1.d.15. 1.pr.8. 1.d.10.

Theor. 6. *Propos.* 13. *Se la linea AB starà sopra la DC, e farà i due angoli ABD, ed ABC, questi ouero saranno retti, ouero vguali a due retti.*

Pe-

1.d.10


PErocche ouero saranno frà loro vguali, e saranno retti. Ma se non
1.pr.12. sono vguali, alzisi dal punto B sopra la CD la perpendico-
1.d.10 lare BE; gli angoli CBE, ed EBD saranno retti; ma a questi due sono vguali gli angoli ABD, & ABC, adunque, se non sono retti, sono vguali a due retti, il che si douea dimostrare.

Theor. 7. Propos. 14. Al punto B della retta linea AB concorrano le due rette linee CB, & DB non poste dalla medesima parte, e facciano gli angoli conseguenti CBA, & ABD vguali a due retti. Dico la DB essere per diritto alla BC.

A
E
B
C D

IMperoeche se non è, si tiri la BE, che faccia vna linea retta con la CB, saranno i due angoli
pst. 2. CBA, ed ABE vguali a
ante. due retti; ma si è supposto, che i due angoli CBA, & ABD fossero vguali a due retti, adunque i due angoli
as. 1. CBA, & ABE douerebbero essere vguali a' due CBA, ed ABD, e leuato
as. 3. il comune CBA, l'angolo ABE douerebbe essere vguale all'angolo ABD, la
as. 9. parte vguale al tutto, il che è impossibile,

bile, adunque non saranno per diritto le due CB, e BE, ma ben si le due CB, e BD, il che si douea dimostrare.

Theor. 8. Propos. 15. Se le due linee rette AB, e CD si seghino nel punto E, l'angolo AEC sarà vguale all'angolo, che gli è alla cima DEB, e parimente l'angolo AED sarà vguale all'angolo BEC, che gli è alla cima.



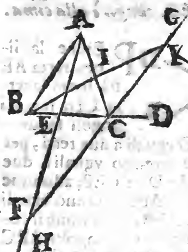
Perche la linea retta AE stà sopra la retta CD, farà gli angoli seguenti AEC, & AED vguali a due retti, per la stessa ragione saranno vguali a due retti gli angoli AED, e DEB; adunque gli angoli AEC,&AED saranno vguali a' due AED, & DEB, e leuatone il comune AED, rimanerà l'angolo AEC vguale all'angolo DEB, che gli è alla cima, e nello stesso modo si dimostrerà l'angolo AED vguale all'angolo BEC, il che si douea fare. 1. pr. 13. as. 1. as. 3.

COROLLARIO.

DA questo si raccoglie, che quante linee rette insieme si seghino, fanno la somma de gli angoli al segamento vguale a quattro retti.

Theo-

Theor. 9. Propos. 16. Se del triangolo ABC si prolunghi vn lato per esempio BC in D, l'angolo esteriore ACD sarà maggiore di qual si voglia delli due angoli interiori, & opposti, cioè dell'angolo ABC, ouero dell' angolo BAC.

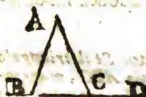


PRimieramẽte si dimostrerà maggiore dell' angolo ABC, diuidendo il lato BC
1. pr. 10. in due parti vguali in E, e tirata per E la linea AH, si pōga EF vguale
pos. 1.
1. pr. 3. ad AE, poi per
pos. 1. C si tiri la linea FG; sarà l'angolo FEC vguale all'angolo BEA, ed i lati FE, ed EC fatti vguali
1. pr. 15. a' lati AE, e BE; adunque sarà il trian-
1. pr. 4. golo FEC vguale al triangolo BEA, e l' angolo FCE vguale all' angolo ABC,
1. pr. 15. ma è vguale ancora all' angolo GCD, del quale è maggiore l' angolo ACD, adunque l'angolo ACD sarà maggiore dell' angolo ABC; il che si doueа dimostrare.

Similmente dimostreremo essere maggiore dell'angolo BAC diuidendo il

il lato AC due parti vguali in I, e tirata la linea BK in modo che IK sia vguale alla BI, tiro la linea KC; sarà l'angolo KIC vguale all'angolo BIA, ed i lati KI, ed IC sono fatti vguali a' lati BI, ed AI; perciò il triangolo KIC sarà vguale al triangolo BIA, e l'angolo BAI sarà vguale all'angolo ICK; adunque l'angolo ACD, che è maggiore dell'angolo ICK, sarà maggiore ancora dell'angolo BAI, il che si douea dimostrare. *1. pr. 10.* *1. pr. 3.* *1. pr. 15.* *1. pr. 4.*

Theor. 10. Propos. 17. Due angoli del triangolo ABC presi in qual si voglia modo sono minori di due retti.



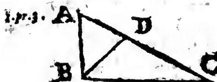
PRolunghisi la BC in D; l'angolo esteriore ACD sarà maggiore dell' interiore, ed opposto ABC: pongasi comune ACB, adunque gli angoli ACD, & ACB, che sono vguali à due retti, sono maggiori de gli angoli ABC, e BCA; adunque questi saranno minori di due retti. *pos. 2.* *ante.* *1. pr. 13.*

Similmente dimostreremo gli angoli BAC, ACB, & CAB, ABC esser minori di due retti, il che si douea dimostrare.



Theo-

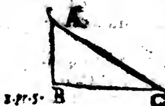
Theor. 11. Propos. 18. Se il triangolo ABC abbia il lato AC maggiore del lato AB, auerà ancora l'angolo ABC maggiore dell'angolo BCA.

1.pr.3. 

TAgliſi la AD vguale alla AB, e giungaſi BD; ſarà l'angolo ADB maggiore dell'interiore, ed oppoſto DCB, ma è vguale all'angolo ABD, adunque ancora l'angolo ABD ſarà maggiore dell'angolo DCB, ma l'angolo ABC è maggiore dell'angolo ABD, adunque ſarà ancora molto più maggiore dell'angolo DCB, il che ſi douea dimoſtrare.

1.pr. 16.

Theor. 12. Propoſ. 19. Se il triangolo ABC auerà l'angolo ABC, maggiore dell'angolo BCA, ancora il lato oppoſto AC ſarà maggiore del lato AB.



SE non è maggiore ſarà o vguale, o minore; Se vguale, ſarà l'angolo ACB vguale all'angolo ABC contra la ſuppoſizione.

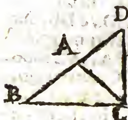
1.pr.5. Se minore, ſarà l'angolo oppoſto ABC

ante. minore dell'angolo ACB ſimilmente

contra

contra la ſuppoſizione, non potendo dunque eſſere ne vguale, ne minore, ſarà per neceſſità maggiore, il che ſi douea dimoſtrare.

Theor. 13. Propoſ. 20. Due lati come ſi voglia BA, AC del triangolo BAC inſieme preſi ſono maggiori del rimanente BC.



PRolunghiſi BA in D, in modo che AD ſia vguale a CA, e giungaſi DC. Perche DA è vguale ad AC, ſarà ancora l'angolo ADC vguale all'angolo ACD; ma l'angolo BCD è maggiore dell'angolo ACD; adunque ſarà ancora maggiore dell'angolo BDC, ed il lato BD compoſto da' lati BA, ed AC, che s'oppone all'angolo maggiore BCD, ſarà maggiore del lato BC oppoſto all'angolo minore BDC, il che ſi douea dimoſtrare.

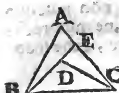
poſ. 2. *poſ. 1.* *1. pr. 5.* *aſ. 9.* *ant.*

Theor. 14. Prop. 21. Se da' termini del lato BC del triangolo ABC ſi tirino dentro le due linee BD, e CD, queſte ſaranno minori de gli altri due lati BA, ed AC, ma conteneranno l'angolo BDC maggiore dell'angolo BAC.



Pro-

pos. 2.



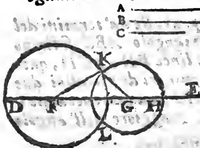
PRolunghisi BD nel punto E, saranno i due lati BA,& AE del triangolo BAE maggiori del lato BE: pongasi EC comune, adunque BA, & AC sono maggiori di BE, ed EC; similmente, perche i due lati CE, ed ED del triangolo CED sono maggiori del lato CD, pongasi la comune DB saranno CE, ed EB maggiori di CD, e DB, ma si è dimostrato BA, AC esser maggiori di BE, EC; adunque BA, AC sono molto maggiori di BD, DC; oltre à ciò, perche l'angolo BDC esteriore è maggiore dell' angolo CED interiore, e questo maggiore dell' angolo BAC, sarà l'angolo BDC molto maggiore dell' angolo BAC, il che si douea dimostrare.

ante.

ante.

1. pr. 16.

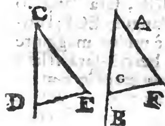
Probl. 8. Propos. 22. Date trè rette linee A, B, C, due delle quali sieno maggiori della rimanente, fare vn triangolo, il quale abbia i suoi lati vguali alle trè linee date.



PRopongasi la linea DE terminata nel punto D, ma indeterminata verso

verso E, e pongasi la DF vguale alla A, 1.pr.2.
e la FG vguale alla B, e la GH alla C.
E col centro F, ed interuallo FD si descriua il cerchio DKL, poi col centro pos. 3.
G interuallo GH si descriua il cerchio
KLH, e tirisi FK, e GK. Sarà FK pos. 1.
vguale alla DF posta vguale alla data A,
adunque vguale alla data A; similmēte
KG vguale alle GH posta vguale alla ass. 1.
C, e perciò vguale alla stessa C, e la FG,
è stata posta vguale alla B, di modo che
sarà fatto il triangolo, co' lati vguali
alle trè date linee, il che si doueua fare.

Probl. 9. Propos. 23 Nella data linea AB sia dato il punto A, al quale bisogna constituire vn' angolo rettilineo vguale ad vn dato angolo DCE.

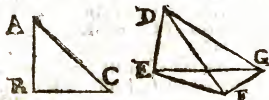


Giungasi la linea DE, e da trè linee rette vguali alle trè CD, DE, EC si faccia il triangolo AFG, di modo, che la CD sia vguale alla AF, la CE ante.
alla AG, la DE alla FG. Sarà ancor l' 1.pr.8.
angolo DCE vguale all' angolo FAG,
il che si doueua fare.

Theor. 15. Propos. 24. Se il triangolo ABC abbia il lato AB vguale al lato DE del triangolo DEF, ed il lato AC vguale al lato DF, ma l' angolo

BAC

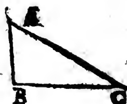
BAC maggiore dell' angolo EDF. Dico ancora la base BC esser maggiore della base EF.



antc. Constituiscasi nella linea DE, nel punto, che è in essa D, l'angolo
1.pr.2. EDG vguale all'angolo BAC, e la DG vguale ad vna di esse AC, DF, e giun-
pos. 1. gasi GE, FG. Sarà la base BC vguale
1.pr.4. alla base EG. Oltre di ciò perche la
1.pr.5. DG è vguale alla DF, e l'angolo DFG vguale all'angolo DGF, sarà l'angolo DFG maggiore dell'angolo EGF; l'angolo adunque EFG è molto maggiore dell' angolo EGF; Perciò sarà il lato EG opposto all'angolo maggiore, mag-
1.pr. 19. giore del lato EF opposto all' angolo minore, ma EG è vguale al lato BC, adunque ancora BC sarà maggiore di EF, il che si douea prouare.

Theor. 16. Propos. 25. Se il triangolo ABC abbia il lato AB vguale al lato DE del triangolo DEF, ed il lato AC vguale al lato DF, ma la base BC sia maggiore della base EF; Dico ancora l'angolo BAC essere maggiore dell'angolo EDF.

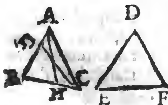
Se





SE non è maggiore, farà vguale, o minore; se vguale, farebbe la base BC vguale alla base EF; se minore, farebbe la base BC minore della base EF; ma si è supposto maggiore: Adunque l'angolo BAC farà maggiore dell' angolo EDF, il che si douea dimostrare. 1.pr.4. ant.

Theor. 17. Propos.26. Siano due triangoli ABC, e DEF, e l'angolo ABC dell'vno sia vguale all' angolo DEF dell'altro, e l'angolo BCA all'angolo EFD, & abbiano vn lato vguale ad vn lato, che sia frà gli angoli vguali, o sottoposto ad vno de gli angoli vguali. Dico che 'l rimanente angolo farà vguale al rimanente, e tutto il triangolo a tutto il triangolo.



SIa primieramẽte il lato BC, che è frà gli angoli vguali, eguale al lato EF, e se AB farà vguale a DE, farà manifesta la proposizione; ma se non è vguale, vna di esse 1.pr.4.

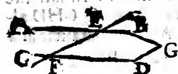
farà maggiore, e ſuppongaſi maggiore
1.pr.3. AB, perciò ſi tagli la BG vguale alla
ED, e giunta GC, i due triangoli GBC,
poſ. 1. e DEF aueranno i due lati GB, e BC
vguali a' due DE, ed EF, e gli angoli
1.pr.4. contenuti vguali; Però ancora l'angolo BCG farà vguale all'angolo EFD, e
aſ. 1. per conſeguenza all'angolo BCA, la
parte vguale al tutto, il che è impoſſibile; adunque AB non è maggiore di
DE, ma vguale.

Ponganſi di nuouo vguali i lati AB, e
DE, che ſi ſottopongono a gli angoli
vguali. Dico ancora il lato BC eſſere
vguale al lato EF, e tutto il triangolo
vguale a tutto il triangolo. Imperocche
ſe il lato BC non è vguale ad EF, vno
di eſſi farà maggiore, pongaſi maggio-
1.pr.3. re BC, e ſi tagli la BA vguale alla EF, e
congiunta la AH, il triangolo ABH
auerà i due lati AB, e BH vguali a' due
DE, ed EF, e gli angoli contenuti
1.pr.4. vguali; adunque farà vguale al triangolo DEF, e l'angolo BHA farà vguale all'angolo EFD, e per conſeguenza
aſ. 1. all'angolo BCA, l'eſteriore all'interio-
1. pr. 16. re, ed oppoſto, il che è impoſſibile;
adunque BC non è maggiore di EF,
ma vguale, e conſeguentemente tutto
1.pr.4. il triangolo a tutto il triangolo, il che
ſi douea dimoſtrare.



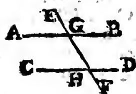
Theor.

Theor. 18. Propoſ. 27. Se la linea EF cadendo ſopra le due linee rette AB, e CD faccia gli angoli alterni AEF, ed EFD vguali frà loro: Dico la linea retta AB eſſere parallela alla CD.



PErciocche ſe non è parallela, le AB, e CD prolungate concorreranno, ò verſo le parti BD, ò verſo le CD: Concorrino dalle parti BD nel punto G, ſi farà il triangolo GEF, il quale auerà l'angolo eſteriore AEF per la ſuppoſizione vguale all'interiore, ed oppoſto EFG, il che è impoſſibile; adunque non concorreranno, perciò ſaranno parallele, il che ſi douea dimoſtrare. 1. pr. 16.

Theor. 19. Propoſ. 28. Cadendo la retta linea EF ſopra le due rette AB, CD faccia l'angolo eſteriore EGB vguale all'interiore, ed oppoſto GHD, ouero gli angoli interiori, e dalle medeſime parti BGH, e GHD vguali a due retti. Dico la linea retta AB eſſere parallela alla CD.



IMperocche eſsẽdo l'angolo EGB vguale all'angolo GHD, e all'angolo AGH alla 1. pr. 15.

as. 1. alla cima, sarà ancora l'angolo AGH vguale all'angolo GHD alterno, adunant. que AB è parallela a CD; oltre di ciò BGH, e GHD sono vguali a due retti,
1. pr. 13. come ancora gli angoli AGH, e BGH, per tanto sarãno gli angoli AGH, BGH
as. 1. vguali a gli angoli BGH, GHD, traggasi
as. 3. il comune BGH; Adunque il rimanente AGH è vguale al rimanente GHD alterno, adunque AB sarà parallela alla
ant. CD, il che si douea prouare.

Theor. 20. Propos. 29. Sieno le linee rette parallele AB, e CD, sopra le quali cada la linea retta EF. Dico, che fà gli angoli alterni AGH, e GHD, vguali frà loro, e l'esteriore EGB vguale all'interiore, ed opposto, e dalle medesime parti GHD, e gl'interiori dalle medesime parti BGH, GHD vguali a due retti.

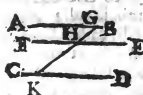


IMperocche se non sono vguali AGH, e GHD, sia maggiore AGH, e pongasi BGH comune. Adũque gli angoli AGH, e BGH, che sono vguali a due retti, sono maggiori de gli angoli BGH, GHD; perciò questi saranno minori di due retti. Onde AB, e CD
pos. 5. prolungate concorreranno: ma non concorrono per esser poste parallele, sarà dunque l'angolo AGH vguale all'

angolo

angolo GHD; ma l'angolo AGH è vguale all'angolo EGB, e però ancora EGB sarà vguale a GHD. Pongasi BGH comune; adunque gli angoli EGB, BGH, che sono vguali a due retti sono vguali a gli angoli BGH, GHD; adunque ancor questi saranno vguali a due retti, il che si douea dimostrare. 1. pr. 15. as. 1. 1. pr. 13. as. 1.

Theor. 21. Propos. 30. Se amendue le rette linee AB, e CD saranno parallele alla EF. Dico, che ancora saranno parallele fra loro.



CAggia sopra esse la linea retta GK; per esser parallele le AB, ed EF, l'angolo AGH sarà vguale all'angolo GHE; similmẽte per esser parallele le rette EF, e CD, l'angolo GHE è vguale all'angolo GKD; adunque ancora l'angolo AGK sarà vguale all'angolo GKD alterno. Onde la AB è parallela alla CD, il che si douea dimostrare. ant. as. 1. 1. pr. 27.

Probl. 10. Propos. 31. Dal punto A tirare vna linea retta parallela alla data retta BC.



PIglisi nella BC qual si voglia punto D, e giunta AD

1. pr. AD al punto A si faccia l'angolo DAE
23. vguale all'angolo alterno ADC. La
1. pr. EA proíogata sarà parallela alla BC, il
27. che si douea fare.

Theor. 22. Prop. 32. Di qualunque triãgolo ABC prodotto vn lato BC in D, l'angolo esteriore ACD sarà vguale a' due interiori, ed opposti CAB, ed ABC, e tutti i trè angoli interiori del triangolo sono vguali a due retti.

Tirisi per lo punto C la CE pa-
aut. rallela alla retta
1. pr. AB; cadendo in
29. queste la retta
AC farà gli angoli alterni BAC, & ACE vguali frà loro. Similmente perche nelle sudette parallele AB, e CE cade la retta DB, sarà l'
1. pr. angolo esteriore ECD vguale all'inte-
29. riore, ed opposto ABC. Onde tutto l'esteriore ACD sarà vguale a' due interiori, ed opposti BAC, ed ABC; pon-gasi ACB comune, saranno gli angoli
1. pr. ACD, ed ACB, che sono vguali a due
13. ACD, ed ACB, che sono vguali a due
ass. 2. retti, vguali alli trè ABC, BCA, CAB; adunque ancora questi trè saranno vguali a due retti, il che si douea dimostrare.

❋❋❋

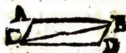
Theor.

Theor. 23. Propos. 33. Siano vguali, e parallele AB, e CD, e le linee rette AC, BD le congiungano dalle medesime parti. Dico ancora le AC, e BD esser vguali, e parallele.



TIrisi la BC, e per esser AB pr. 1. parallela alla CD saranno vguali gli angoli alterni ABC, e BCD, ed essendo i lati, 1. pr. 29. che li contengono AB, e BC vguali a' due CD, e BC, sarà il triangolo ABC vguale al triangolo BCD, ed il lato AC 1. pr. 4. vguale al lato BC, e parallelo per essere l'angolo ACB vguale all'angolo alterno CBD, il che si douea dimostrare. 1. pr. 27.

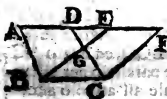
Theor. 24. Propos. 34. Lo spazio parallelogrammo ACBD, il cui diametro sia BC, auerà i lati, e gli angoli opposti vguali, ed il diametro BC lo sega per mezzo.



IMperocche essendo la AB parallela alla CD, gli angoli alterni ABC, e BCD sono vguali; 1. pr. 29. similmente si dimostrano vguali gli angoli ACB, e CBD, ed il lato BC è comune a' due triangoli ABC, e BCD, adunque 1. pr. 26. questi saranno vguali, adunque lo spa-

zio è diuiso per mezzo dal diametro BC, e l'angolo BAC sarà vguale all'angolo opposto BDC, e l'angolo ACD all' angolo ABD, ed il lato AB al lato CD, ed il lato AC al lato BD, il che si doueà dimostrare.

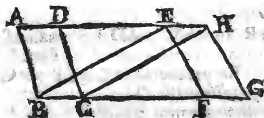
Theor. 25. Prop. 35. Se i parallelogrammi ABCD, ed EBCF saranno nella medesima base BC, frà le medesime parallele AF, e BC saranno frà di loro vguali.



PErciocche essendo ABCD parallelogrammo, la AD è vguale alla BC, e per la medesima ragione la EF è vguale alla
ant. BC, e perciò vguale alla AD; aggiungasi la DE comune, sarà AE vguale
as. 2. a DF, & è la AB vguale alla DC, onde le due EA, AB sono vguali alle
ant. due FD, DC l'vna all'altra, e l'angolo FDC esteriore vguale all'angolo
1. pr. EAB interiore, ed opposto; adunque
29. il triangolo EAB è vguale al triangolo
1. pr. FDC; trattone lo spazio comune DGE,
4. sarà il rimanente trapezio ABGD
as. 3. vguale al rimanente EGCF, ed aggiun-
as. 2. toui lo spazio comune GBC, sarà tutto il parallelogrammo ABCD vguale al parallelogrammo EBCF, il che si doueà dimostrare.

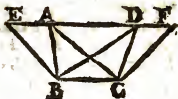
Theor.

Theor. 26. Propos. 36. Se i parallelogrammi ABCD, ed EFGH saranno nelle basi vguali BC, FG, e nelle medesime parallele AH, e BG saranno frà di loro vguali.



Conginganfi BE, e CH; e perche la BC è vguale alla FG, e la FG alla EH, sarà ancora la BC vguale alla EH, e parimente parallele, ed vguali le due BE, e CH, che le congiungono. Onde EBCH è parallelogrammo, ed vguale al parallelogrammo ABCD, perche hà la medesima base BC, ed è frà l'istesse parallele; per la medesima ragione il parallelogrammo EFGH è vguale al medesimo parallelogrammo EBCH. Però sarà vguale ancora al parallelogrammo ABCD, il che si douea dimostrare. 1. pr. 33. as. 1. 1. pr. 33. ant. ant. as. 1.

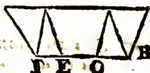
Theor. 27. Propos. 37. Se i triangoli ABC, DBC siano nella medesima base BC, e nelle medesime parallele AD, e BC saranno vguali frà di loro.



pos. 2. PRolunghisi la AD dall' vna, e l'altra parte nei punti E, F, e per B tirisi la BE parallela alla CA, e per C la
1. pr. 31. CF parallela alla BD, saranno fatti due
1. pr. 35. parallelogrammi EBCA, e DBCF, i quali per essere nella medesima base, e nelle medesime parallele saranno frà di
1. pr. 33. loro vguali. Adunque ancora i triangoli, che sono metà de sudetti paralle-
as. 7. logrammi saranno vguali frà di loro, il che si douea prouare.

Theor. 28. Propos. 38. Se i triangoli ABC, e DEF saranno in basi vguali BC, ed EF: e frà le medesime parallele BF, ed AD saranno vguali frà di loro.

po. 2. PRolunghisi AD dall'vna, e l'altra parte ne' pun-
1. pr. 31. ti GH, e tirisi BG parallela alla CA,



ed FH parallela alla ED, saranno fatti
1 pr. 36. due parallelogrammi GBCA, e DEFH, i quali saranno vguali per essere in basi vguali,

vguali, e frà l'istesse parallele; adunque ancora i triangoli che sono la metà saranno vguali, il che si douea dimostrare. as. 7.

Teor. 29. Prop. 39. Siano i triãgoli vguali ABC, e DBC nella medesima base BC, e dalle medesime parti. Dico essere ancora nelle medesime parallele.



Giunghisi AD, la quale se non è parallela alla BC si tiri la 1. pr. 31. retta AE parallela alla BC, e giungasi EC; adunque il triangolo ABC sarà 1. pr. 37. vguale al triangolo EBC, essendo nella medesima base, e frà le medesime parallele per la supposizione. Ma il triãgolo ABC è detto vguale al triangolo DBC; adunque il triangolo DBC sarà vguale al triangolo EBC il tutto alla parte, il che è impossibile; adunque AD non AE sarà parallela a BC, il che si douea dimostrare.

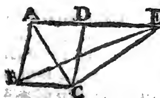
Theor. 30. Propos. 40. Siano i triangoli ABC, e CDE constituiti nelle basi vguali BC, e CE. Dico eziandio essere nelle medesime parallele.



Giungasi AD, la quale se non

1. pr. 31. non è parallela alla BE si tiri la AF parallela alla BE, e giungasi FE; Adunque il triangolo ABC sarà vguale al triangolo FCE per essere in basi vguali, 1 pr. 38. e frà l'istesse parallele BE, & AF. Ma il triangolo ABC è posto vguale al triangolo DCE, onde ancora il triangolo as. 1. DCE sarà vguale al triangolo FCE, il tutto alla parte, il che è impossibile, adunque AD, non AF sarà parallela a BC, il che si douea dimostrare.

Theor. 31. Propos. 41. Se il parallelogrammo ABCD, ed il triangolo EBC saranno nella medesima base BC, e frà le medesime parallele BC, ed AE, il parallelogrammo sarà doppio del triangolo.

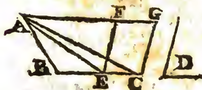


IMperocche giugnendosi AC il triangolo ABC sarà vguale al 1. pr. 37. triangolo EBC, mà il parallelogrammo ABCD è doppio del triango- 1. pr. 34. lo ABC segandolo per mezzo il diametro AC, perciò sarà ancora doppio del triangolo EBC, il che si douea prouare.



Con-

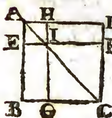
Probl. 11. Prop. 42. Conſtituire vn parallelogrammo vguale ad vn dato triangolo ABC, ed inclinato in vn' angolo vguale ad vn dato angolo D.



SEghiſi BC per mezzo in E, e giunta AE, nella linea retta EC, e nel punto, che è in eſſa E ſi faccia l'angolo CEF vguale all'angolo D, e per A tiriſi la AG parallela alla EC, e per C tiriſi la CG parallela alla FE, ſarà vn parallelogrammo FECG; e perche la BE è vguale alla EC, ſarà il triangolo ABE vguale al triangolo AEC, ed il triangolo ABC ſarà doppio del triangolo AEC, perciò vguale al parallelogrammo FECG, il qual parallelogrammo è inclinato nell'angolo CEF vguale all'angolo dato D, il che ſi douea fare.

1. pr. 10. — 1. pr. 23. — 1. pr. 31. — 1. pr. 38. — ant.

Theor. 32. Prop. 43. Sia il parallelogrãmo ABCD, il cui diametro AC, e d'intorno ad eſſo ſiano i parallelogrammi EH, GF, e quei, che ſi chiamano ſuplementi BI, ed ID. Dico il ſuplemẽto BI eſſer vguale al ſuplemẽto ID.



IMperocche il triãgolo ABC ſarà vguale al triangolo ADC; ſimilmente il triangolo AEI, vguale al triangolo

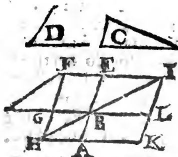
1. pr. 34.

lo AHI, ed il triangolo IGC vguale al triangolo IFC; Perciò il triangolo AEI, insieme col triangolo IGC sarà vguale al triangolo AHI insieme col triangolo IFC, i quali leuati da' triangoli vguali ABC, ed ADC, saranno i rimanenti suplementi BI, e ID vguali, il che si douea prouare.

as. 2.

as. 3.

Probl. 12. Propos. 44. Bisogna alla data retta linea AB adattare vn parallelogrammo vguale al dato triangolo C inclinato in vn' angolo vguale al dato angolo D.

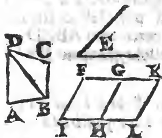


Constituiscasi il parallelogrammo BEFG vguale al dato triangolo C nell'angolo EBG, che sia vguale al dato angolo D, e pongasi la BE per diritto alla AB, e prolunghisi la FG in H, e per A tirisi la AH parallela ad vna di esse BG, ouero EF, e giungasi HB. Perche dunque nelle parallele AH, ed EF cade la retta HF gli angoli AHF, ed HFE sono vguali a due retti, laonde BHG, e GFE sono minori di due retti; adunque le HB, e FE prolungate concorreranno, come nel punto I, per lo quale tirisi la IK parallela ad vna delle EA,

1. pr. 42. — pos. 2. — 1. pr. 31. — 1. pr. 29. — pos. 5. — 1. pr. 31.

EA, e FH, e le HA, e GB si prolunghino nei punti L, K. Adunque FK è parallelogrammo, il cui diametro HI, intorno al quale sono i parallelogrammi AG, LE, ed i suplementi KB, e BF, che saranno vguali: ma ancora BF è vguale al triangolo C; onde eziandio KB sarà vguale al triangolo C; e perche l'angolo GBE è vguale all'angolo ABL, ma è anco vguale all' angolo D, sarà l' angolo ABL vguale all'angolo D, ed il parallelogrammo AL vguale al triangolo C, applicato alla data linea AB nel dato angolo D, il che si douea fare. *ant.* *as. 1.* *1. pr. 15.* *as. 1.*

Probl. 13. Propos. 45. Constituire vn parallelogrammo vguale al dato rettilineo ABCD in vn' angolo vguale al dato angolo E.



Constituiscasi il parallelogrammo FH vguale al triangolo ADB nell' angolo HIF vguale al dato angolo E, e poi alla linea retta GH adattisi il parallelogrammo GL vguale al triangolo DBC nell'angolo GHL, che è vguale all'angolo dato E, il quale essendo vguale ad amendue HIF, e GHL, sarà anche HIF vguale a GHL; ed aggiuntoui il comune IHG, saranno gli angoli FIH, e IHG, che sono vguali a *1. pr. 42.* *ant.* *as. 1.* *as. 2.*

due

due retti vguali a gli angoli IHG, e
1. pr. GHL, perciò questi ancora saranno
29. vguali a due retti; adunque la IH sarà
1. pr. per diritto alla HL; e perche nelle pa-
14. rallele EL, e FG cade la linea retta HG,
1. pr. gli angoli alterni LHG, e HGF sono
29. vguali, postoui HGK comune, saranno
gli angoli LHG, e HGK, che sono
vguali a due retti, vguali a gli angoli
HGF, e HGK, perciò ancora questi sa-
1. pr. ranno vguali a due retti, e la FG sarà
14. per diritto alla GK; e perche la IF è
1. pr. vguale, e parallela alla HG, e la HG
34. alla LK, sarà la IF vguale, e parallela
1. pr. alla LK; adunque ancora le linee che le
33. congiungono IL, e FK sono vguali, e
parallele, e sarà vn parallelogrammo
IFKL; ed essendo il triangolo ABD
vguale al parallelogrammo HF, ed il
triangolo DBC al parallelogrammo
GL, sarà tutto il rettilineo ABCD v-
guale a tutto il parallelogrammo IFKL,
il che si douea fare.

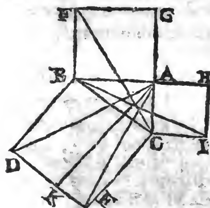
Probl. 14. Prop. 46. Sopra la data linea AB descriuere vn quadrato.



1. pr. 11. DAL punto A s'alzi la AC perpendicolare alla AB,
1. pr. 3. dalla quale si tagli AD vguale alla AB, e per D tirisi la DE parallela alla AB, e per B la
1. pr. 31. BE parallela alla AD. Sarà ADEB parallelogrammo, e la AB vguale alla DE, e la AD vguale alla BE, e AB;
adun-

adunque le quatro BA, AD, DE, e EB 1. pr.
sono vguali frà loro; adunque il paral- 33.
lelogrammo sarà equilatero, e perche
cadendo nelle rette parallele AB, e DE 1. pr.
la retta AD, gli angoli BAD ADE sono 29.
vguali a due retti, e BAD è stato fatto
retto: Adunque eziandio ADE sarà
retto, e retti gli angoli opposti, adun- 1. pr.
que sarà il parallelogrammo DABE, 34.
equilatero, e rettangolo, e perciò qua- 1. d. 30.
drato, il che si douea fare.

Theor. 33. Propos. 47. Nel triangolo, che abbia l'angolo retto BAC, il quadrato BDEC descritto dal lato BC, che si oppone all' angolo retto, sarà vguale a' quadrati GB, ed HC, che si descriuono da' lati BA, ed AC, che contengono l'angolo retto.



Tirisi da A 1. pr.
la linea 31.
AK paralle-
la alle linee
BD, e CE, e
giūgasi AD,
ed FC: per-
che dunque
l'vno, e l'al-
tro de gli
angoli BAC,
e BAG è ret-
to, CA sarà per diritto alla AG, e per 1. pr.
la medesima ragione la AB per diritto 14.
alla

alla AH; e perchè l'angolo DBC è
pos. 4. vguale all'angolo FBA, per essere amédue retti, pongasi il comune ABC, tutto l'angolo DBA sarà vguale a tutto FBC, e perche le due AB, e BD sono vguali alle due FB, e BC l'vna all'altra, e l'angolo DBA vguale all'angolo FBC, sarà il triangolo ABD vguale al trian-
1.pr. 4. golo FBC, ed il parallelogrammo BK è doppio del triangolo ABD per essere sopra la medesima base BD, e frà le
1.pr.41 medesime parallele BD, ed AK, ed il quadrato GB per l'istessa ragione è doppio del triangolo FBC; ma quelle cose che sono doppie delle vguali sono
as. 6. vguali frà loro; Adunque il parallelogrammo BK è vguale al quadrato GB; e giunte parimente AE, e IB si dimostrerà il parallelogrammo CK vguale al quadrato HC; tutto dunque il quadrato BDEC è vguale ai due quadrati GB, e HC, il che si douea dimostrare.



Theor.

Theor. 34. Propos. 48. Se il quadrato, che si descriue da vn lato BC del triangolo ABC sarà vguale a' quadrati descritti da gli altri lati del triangolo BA, ed AC l'angolo BAC sarà retto.



Tirisi dal ponto A la AD ad angoli retti sopra la AC, e si faccia vguale alla AB, e giungasi DC. Saranno i due quadrati delle DA, ed AC vguali a' quadrati delle BA, ed AC; ma a' quadrati delle DA, ed AC è vguale il quadrato della DC, ed a' quadrati delle BA, e AC si pone vguale il quadrato della BC, onde il lato DC sarà vguale al lato BC, e l'angolo DAC sarà vguale all'angolo BAC; perciò BAC sarà retto, il che si douea dimostrare. 1.pr.11 1.pr.3. ant. 1.pr.8.

Fine del Primo Libro.

DE

DE GLI ELEMENTI
D'EVCLIDE
LIBRO SECONDO.
DIFFINIZIONI.

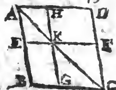


1 Ogni parallelogrammo rettangolo, si dice esser contenuto da due rette linee, che constituiscono l'angolo retto.

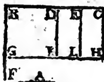
Come per esempio il parallelogrammo rettangolo ABCD si dice essere cõtenuto dalle due rette linee AB, e BC, che constituiscono l'angolo retto ABC: imperocche moltiplicãdo la lunghezza del lato AB in quella del lato BC, si produce l'area di tutto il parallelogrammo; mentreche ogni misura si fà per mezzo delle perpendicolari, le quali sono sempre vniformi, determinate, e certe; come all'incontro le oblique varie, ed incerte. Il che è bene auuertire, come ancora, che per breuità si suole esprimere vn parallelogrammo per le sole due lettere, che sono diagonalmente opposte, come il sudetto parallelogrammo si direbbe il parallelogrammo AC.

2 Nello spazio parallelogrammo ABCD, il cui diametro sia AC, nel quale sia preso il punto K, e per quello sia

sia tirata la linea EF parallela alle due AD, e BC, e la linea HG parallela alle due AB, e DC; i parallelogrammi EH, e GF si dicono intorno al diametro, ed i due parallelogrammi KD, e BK si dicono complementi, e ciascuno de' parallelogrammi, che sono intorno al diametro co' due complementi si dice Gnomone, come il parallelogrammo EH co' due complementi KD, e BK, si dice Gnomone, parimente il parallelogrammo GF co' sudetti due complementi KD, e BK si dice Gnomone.



Theorema I. *Proposicione* I. *Siano due linee rette la prima A, la quale non sia tagliata in parte alcuna, e la seconda BC, la quale sia segata in qualunque modo ne' punti DE; Dico il rettangolo contenuto dalle linee rette A, e BC essere uguale al rettangolo contenuto dalla A, e dal segmento BD, con di più il rettangolo contenuto dalla A, e dal segmento DE, e di più il rettangolo contenuto dalla A, e segmento EC.*



TIrisi dal punto B la BF ad angoli retti sopra la BC, dalla quale 1 pr. 11

1.pr.3. quale si tagli la BG vguale alla A, e per
1.pr.31 G tirisi la GH parallela alla BC, e per
gli punti DEC tirinsi le DK, EL, CH
parallele alla BG. Sarà il rettangolo
BH vguale a' rettangoli BK, DL, EH;
ma il rettangolo BH è contenuto dalle
rette A, e BC, per essere GB posta vguale ad A, e per la medesima ragione BK
è contenuto dalle A, e BD, e DL contenuto dalle A, e DE, per essere DK
vguale alla BG, e BG alla A; e final-
1.pr.33 mente EH contenuto dalla A, ed EC
per essere EL vguale alla DK, e la DK
alla BG; Adunque sarà il rettangolo
contenuto dalle A, e BC vguale alla
somma de rettangoli contenuti dalle
A, e BD dalla A, e DE, e dalla A, ed
EC segmenti della data linea BC, il che
si douea dimostrare.

Theor. 2. Propos. 2. Se la retta linea AB sia segata in qual si voglia modo in C, il rettangolo contenuto da tutta la AB, ed il segmento AC, con di più il rettangolo contenuto da tutta la sudetta AB nell'altro segmento CB, sarà vguale al quadrato di tutta la AB.

1.pr.46 

DEscriuasi dalla AB il quadrato ADEB, e tirisi per C la CF parallela ad vna di esse AD, BE. Sarà il quadrato AE, fatto dalla linea AB,
vguale

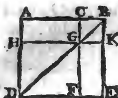
vguale ai rettangoli AF, e CE fatti dalla linea AB vguale alle linee AD, e CF ne' segmenti AC, e CB, il che bisognaua dimostrare. 1.d.30

Theor. 3. Prop. 3. Sia la retta linea AB tagliata in qualunque modo nel punto C: dico, che'l rettangolo contenuto da tutta la AB nel segmento BC è vguale al rettangolo contenuto da' segmenti AC, e CB, e di più il quadrato del segmento CB.

B C A
E D F

Descriuasi dalla BC il quadrato CDEB, e prolunghisi ED in F, e per A tirisi la AF parallela ad vna di esse CD, o BE; sarà il rettangolo AE contenuto da tutta la AB, e dal segmento BC, per essere BE vguale a BC, composto da' due rettangoli AD, e CE, cioè da' rettangoli fatti da' segmenti AC, e CB per essere CD vguale alla CB, e dal quadrato CE fatto dal segmento CB, il che si douea dimostrare. 1.pr.46 1.pr.31 2.d.1. 1.d.30

Theor. 4. Prop. 4. Sia la linea retta AB diuisa in qualunque modo nel punto C. Dico, che'l quadrato di tutta l'AB, è vguale a' quadrati de' segmenti AC, e CB, ed a quel rettangolo, che due volte si contiene dalle AC, e CB.



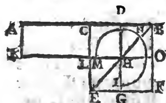
1.pr.46 DEscriuasi dalla
AB il quadrato
ADEB, e tirisi il dia-
metro BD, e per C ti-
1.pr.31 risi la CGF parallela
ad vna di esse AD, e
BE; e per G tirisi HK parallela ad vna
delle AB, e DE. Perche dunque nelle
1.pr.29 parallele AD, e CF cade la BD, sarà l'
angolo BGC esteriore vguale all'inte-
riore, ed opposto ADB; ma l'angolo
ADB è vguale all'angolo ABD, perche
il lato AB è vguale al lato AD; adun-
que sarà l'angolo CGB vguale all'an-
1.pr.5. golo GBC; perciò il lato BC sarà vgua-
1.pr.6. le al lato CG; ma è vguale ancora al
1.pr.34 lato opposto G*K*, e GC a B*K*; adun-
que CG*K*B sarà equilatero; ma è an-
cora rettangolo, essendo CG parallela
alla B*K*, ed in esse cade la CB, che fà
1.pr.29 gli angoli *K*BC, e GCB vguali a due
retti, e per essere l'angolo *K*BC retto,
sarà eziandio GCB retto, e saranno
1.pr.34 retti gli angoli opposti CGK, e G*K*B;
onde CG*K*B per essere rettangolo, ed
equilatero sarà quadrato. Per la me-
1.d.30. desima ragione HF, che si fà da HG,
cioè da AC sarà quadrato; laonde HF,
e C*K* sono quadrati di AC, e CB; e
perche il rettangolo AG è vguale al
1.pr.43 rettangolo GE, ed AG è contenuto
dalle AC, e CB per essere GC vguale
alla CB, sarà ancora GE vguale al ret-
tan-

tangolo che si contiene dalle AC, e CB. Perciò tutto il quadrato ADEB sarà vguale a' quadrati de segmenti AC, e CB, & al rettangolo, che due volte si contiene dalle AC, e CB, il che si douea dimostrare.

COROLLARIO.

DA questo si raccoglie, che ne' spazij quadrati, i parallelogrammi, che sono d'intorno al diametro sono ancor loro quadrati.

Theor. 5. Propos. 5. Sia la linea retta AB segata in parti vguali nel punto C, ed in parti disuguali nel D. Dico, che il rettangolo contenuto da' segmenti disuguali AD, e DB, insieme col quadrato, della parte CD, ch' è frà segmenti è vguale al quadrato della metà BC.



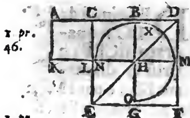
DEscriuasi da BC il quadrato BCEF, e tirisi il diametro BE, e per D tirisi la DHG parallela ad vna di esse CE, e BF, e per H tirisi la KLO parallela, ad vna delle CB, EF; e finalmente per A tirisi la AK parallela ad vna delle CL, e BO: e perche il supplemento CH è vguale al supplemento HF, 1. pr. 46. 1. pr. 31. 1. pr. 43.

C pon-

pongasi DO comune, sarà tutto
as. 2. il rettangolo CO vguale a tutto DF;
1. pr. ma CO è vguale ad AL, onde ezian-
36. dio AL è vguale a DF; pongasi CH comune, sarà tutto AH contenuto da' segmenti ineguali AD, e DB vguale a FD, e DL, cioè al gnomone MNI; pongasi comune LG, che è vguale al
as. 2. quadrato di CD, sarà tutto il quadrato CF vguale al rettangolo ADB insieme col quadrato di CD, il che si douea dimostrare.

Theor. 6. Propos. 6. Se vna linea retta AB sia segata per mezzo nel punto C, e vi si aggiunga BD per diritto. Dico che 'l rettangolo ADB fatto da tutta la linea con l'aggiunta nell'aggiunta, con di più il quadrato della metà BC, è vguale al quadrato che si fà dalla CD composta dalla metà con l'aggiunta.

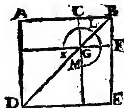
1 pr. 46.



Descriuasi dalla CD il quadrato CEFD, e giungasi DE, e per B si tiri BHG parallela ad vna di
1. pr. 31. esse CE, e DF, e per H tirisi KLM parallela ad vna delle AD, ed EF, e finalmente per A tirisi
1. pr. AK parallela ad vna delle CL, e DM.
36. Per essere AC vguale a CB, il rettangolo

golo AL farà vguale al rettangolo CH, e perciò ad HF; pongasi BM comune, 1. pr. 43.
adunque tutto AM è vguale al gnomone NXO, pongasi comune LG, ch' as. 2.
è vguale al quadrato di CB, farà il rettangolo AM, fatto dalla retta AB con di più l'aggiunta BD nell' aggiunta BD, con di più il quadrato della metà CB vguale al quadrato CF fatto dalla metà con l'aggiunta, il che si douea dimostrare.

Theor. 7. Propos. 7. Sia la retta AB segata in qualunque modo nel punto C. Dico che i quadrati di tutta AB, e d'vno de segmenti BC sono vguali al rettangolo contenuto due volte da tutta l'AB, e dal sodetto segmento BC, con di più il quadrato dell'altro segmento AC.

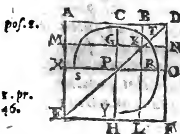


Descriuasi da tutta l'AB il 1. pr. 46.
quadrato ADEB, e tirata la BD si constituisca la figura. Perche 'l rettangolo AG 1. pr. 43.
è vguale al rettangolo GE, postoui il comune CF, tutto il rettangolo AF sarà vguale a tutto CE; as. 2.
ma AF, e CE constituiscono il gnomone KLM con di più il quadrato CF, pongasi comune DG, che è il quadrato di AC, sarà il gnomone KLM co' quadrati di

 BC,

BC, ed AC, cioè i quadrati BG, e GD vguali a' due rettangoli AF, e CF, che sono vguali a' fatti da AB in BC, ed al quadrato AC, il che si douea prouare.

Theor. 8. Propos. 8. Sia la linea retta AB segata in qualunque modo nel punto C, dico; che 'l rettangolo contenuto quattro volte dalle AB, e BC, insieme col quadrato di AC è vguale al quadrato di AB, più BC come d' vna linea sola.

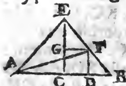


pos. 1. PRolunghisi la linea retta AB in D; e sia la BD vguale alla CB; e
1. pr. 46. dalla AD descriuasi il quadrato AEFD, e tirato il diametro DE, alle rette AE, e DF si tirino da' punti C, e B le paral-
1. pr. 31. lele CH, e BL, e da' punti oue tagliano il diametro K, e P a' lati AD, ed EF le parallele MN, e XO.

as. 1. Perche dunque la CB è vguale BD, ed alla GK, e la BD vguale alla KN, sarà eziandio la GK vguale alla KN; e per la medesima ragione la PR è
1. pr. 36. vguale alla RO, ed il rettangolo CK sarà vguale al rettangolo KD, ed il rettangolo GR al rettangolo RN; ma
1. pr. 43. i supplementi CK, e RN sono vguali, onde eziandio KD è vguale a GR, ed i quat-

quattro rettangoli DK, KC, GR, RN sono vguali frà loro, e perciò quadrupli del rettangolo CK. Similmente perche la CB è vguale alla BD, e la BD alla BK, cioè alla CG, e la CB alla GK, cioè alla GP, ed è la PR vguale alla RO, il rettangolo AG sarà vguale al rettangolo MP, ed il rettangolo PL al rettangolo RF; ma MP è vguale a PL, essendo suplementi del parallelogrammo ML: e per tal cagione AG è vguale a RF, laonde i quattro AG, MP, PL, RF frà loro sono vguali, e quadrupli di AG; adunque gl'otto parallelogrammi che compongono il gnomone STY sono quadrupli di AK contenuto dalle AB, e BC; pongasi comune XH, che è vguale al quadrato di AC, saranno i quattro rettangoli contenuti dalle AB, e BC con di più il quadrato di AC vguali al quadrato AEFD fatto da AB più BC come da vna linea sola, il che si douea dimostrare. *4.s.2.*

Theor. 9. Propos. 9. Sia la retta linea AB segata in parti vguali in C, ed in parti disuguali in D. Dico ch' i quadrati delle parti disuguali AD, e DB insieme vniti sono doppi del quadrato fatto della metà AC, o CB, e del quadrato di quella linea, che è frà li segmenti CD.

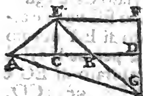


1. pr. 11. Tirisi dal punto C la CE ad angoli retti sopra la AB vguale all'vna, e l'altra di esse AC, e CB, e giungasi EA, ed EB. Poi per D
1. pr. 31. tirisi la DF parallela alla CE, e per F la FG parallela alla AB, e giungasi AF.

Perche adunque la AC è vguale alla
1. pr. 6. CE sarà l'angolo EAC vguale all'angolo AEC, e trà tutti due vguali ad vn'angolo retto, per essere l'ãgolo C retto,
1. pr. 32. e perciò ciascuno vguale alla metà d'vn retto: E per l'istessa ragione l'vn, e l'altro delli CEB, ed EBC, e la metà d'vn retto, onde tutto l'angolo AEB sarà retto: E perche l'angolo GEF è la metà d'vn retto, come ancora l'angolo
1. pr. 29. EFG, per essere vguale all'interiore, ed opposto CBE, sarà il lato EG vguale al
1. pr. 6. lato GF. Similmente si ponerà il lato DF vguale al lato DB; e perche la AC è vguale alla CE, e l'angolo ACE retto, sarà il quadrato di AE doppio del
1. pr. 47. quadrato di AC; similmente si dimostra il quadrato di EF doppio del quadrato di GF, cioè di CD: adunque il quadrato di AF sarà doppio de' quadrati di AC, e CD. Ma il quadrato di
1. pr. 47. AF è vguale a' quadrati di AD, e DF, cioè DB. Adunque i quadrati di AD, e DB insieme vniti, sono doppij de' quadrati della metà AC, e dell'intercetta CD, il che si douea dimostrare.

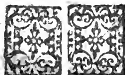
Theor.

Theor. 10. Propos. 10. Sia la retta linea AB segata per mezzo nel punto C, ed aggiungasi ad essa per diritto la linea BD; Dico che i quadrati della composta AD, e della aggiunta BD insieme uniti sono doppij de' quadrati della metà AC, e della metà con l'aggiunta CD.



Tirisi dal punto C la CE perpendicolare sopra la AB, ed vguale a ciascuna di esse AC, e CB, e giungasi AE, ed EB; poi per E tirisi la EF parallela alla AD, e per D tirisi la DF parallela alla CE; E perche nelle parallele EC, e FD cade la linea retta EF, sono gli angoli CEF, EFD vguali a due retti. Adunque gli angoli FEB, EFD sono minori di due retti; adunque prolungandosi le EB, FB concorreranno dalle parti di BD, e sia nel punto G, e giungasi AG; Perche la AC è vguale alla CE, l'angolo AEC sarà vguale all' angolo EAC, e l'angolo C è retto, l' vno, e l'altro di essi EAC, ed AEC sarà la metà d'vn retto; e per la medesima ragione sarà la metà d'vn retto l'vno, e l'altro di essi CEB, ed EBC; adunque AEB è retto; e perche EBC è la metà d'vn retto, sarà anche la metà d'vn ret- 1. pr. 11. 2. pr. 31. 1. pr. 29. pos. 5. 1. pr. 5. 1. pr. 32.

1. pr. to DBG, che gli è alla cima: ma BDG
15. è retto per essere vguale all'alterno
1. pr. DCE, adunque il rimanente DGB è la
29. metà d'vn retto, e però vguale a DBG,
1. pr. 6. onde il lato BD è vguale al lato DG.
Similmente perche EGF è la metà d'vn
retto, ed è retto l'angolo F, essendo
vguale all'opposto C, sarà il rimanente
FEG la metà d'vn retto, ed vguale ad
1. pr. 6. EGF, onde eziandio il lato GF è vguale al lato EF, ed essendo EC vguale al-
1. pr. la CA, sarà il quadrato di EA doppio
47. del quadrato di AC; e perche la GF è vguale alla FE, il quadrato di EG è doppio del quadrato di EF, cioè di CD. Adunque il quadrato di AG, ch'è vguale a' quadrati di AE, ed EG, sarà doppio de' quadrati AC, e CD; ma il quadrato di AG è eguale a' quadrati di AD, e di DG; adunque i quadrati di AD composta dalla data linea, e dalla aggiunta BD, e di DG vguale all'aggiunta BD sono doppij del quadrato della metà, e del quadrato, che si fà dalla metà, e dall' aggiunta, il che si douea dimostrare.



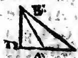
Probl. 1. Prop. 11. Segare la data linea AB in tal modo in H, che 'l rettangolo contenuto da tutta la AB, e dal minor segmento BH sia vguale al quadrato del maggior segmento AH.



Descriuasi dalla AB il quadrato ABCD, e seghisi AC per mezzo nel punto E, e giungasi EB, alla quale si ponghi eguale la EF, e dalla AF si descriua il quadrato AFGH, e GH prolunghisi in K. Dico, che la AB, è segata in H talmente, che 'l rettangolo ABH è vguale al quadrato di AH. Perciocche essendo la linea AC segata per mezzo in E, e aggiuntaui per diritto AF, il rettangolo CFA, insieme col quadrato di AE, sarà vguale al quadrato di EF, cioè della vguale EB, cioè al quadrato di AE, e di AB; traggasi il comune quadrato di AE; adunque il rimanente rettangolo CFA, cioè FK è vguale al quadrato di AB; traggasi AK comune, il rimanente dunque FH quadrato del segmento maggiore AH è vguale al rimanente HD fatto dalla data AB nel minor segmento BH per essere AB vguale a BD, il che si douea dimostrare.

1. pr. 46.
1. pr. 10.
1. pr. 46.
2. pr. 6.
1. pr. 47.
as. 3.
1. d. 30

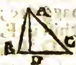
Theor. 11. Prop. 12. Sia il triangolo ottusiangolo ABC, e sia l'angolo ottuso
1. pr. 12. *BAC, e dal pũto B si lascia cadere sopra la CA prolungata la perpendicolare BD. Dico che'l quadrato di CB lato opposto all'angolo ottuso, è tanto maggiore de' quadrati di BA, e AC, che formano l'angolo ottuso, quanto è il rettangolo contenuto due volte da CA, lato nel quale cade la perpendicolare, e da AD contenuta trà l'angolo ottuso, e la perpendicolare.*



PErciocche essendo la linea CD segata in qualunque modo nel punto A sarà il quadrato di CD vguale a' quadrati di CA, AD, ed al rettangolo, che due volte è contenuto dalle CA,
2. pr. 4. AD; pongasi comune il quadrato di DB, adunque i quadrati di CD, e DB sono vguali a' quadrati di CA, AD, DB, ed al rettangolo, che due volte è contenuto dalle CA, e AD, ma a' quadra-
1. pr. 47. ti di CD, e DB è vguale il quadrato di BC, ed a' quadrati di AD, e DB è vguale il quadrato di BA. Adunque il quadrato di CB è vguale a' quadrati di CA, e AB, ed al rettangolo, che due volte è contenuto dalle CA, e AD, il che si douea dimostrare.

Theor.

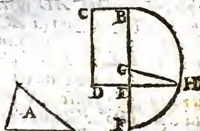
Theor. 12. Prop. 13. Sia il triangolo acutiangolo ABC, che abbia l'angolo B acuto, e dal punto A si faccia cadere la perpendicolare AD sopra BC. Dico, che 'l quadrato di AC, lato opposto all'angolo acuto B, è tanto minore de' quadrati de lati, che contengono l'angolo acuto CB, e BA quanto è il rettangolo contenuto due volte dalla CB, lato nel quale cade la perpendicolare, e da BD intercetta trà la perpendicolare, e l'angolo. 1. pr. 12.



PErche essendo la linea retta CB segata in qualunque modo nel punto D saranno i quadrati di CB, e BD vguali al rettangolo, che due volte si contiene dalle CB, e BD, ed al quadrato di DC. Pongasi il quadrato di AD commune, i quadrati dunque di CB, BD, DA sono vguali al rettangolo, che due volte dalle CB, e BD si contiene, ed a' quadrati di AD, DC, ma a' quadrati di BD, e DA è vguale il quadrato di AB, ed a' quadrati di AD, e DC è vguale il quadrato di AC. Onde i quadrati di CB, e BA sono vguali al quadrato di AC, ed al rettangolo contenuto due volte dalle CB, e BD; e per tal cagione il quadrato di AC è tanto minore de' quadrati di CB, e BA, quanto è il rettangolo contenuto due volte dalle CB, e BD, il che si douea dimostrare. 2. pr. 7. 1. pr. 47.

Probl. 2. Prop. 14. Constituire vn quadrato vguale al dato rettilineo A.

1. pr. 42.



FAcciasi il parallelogrammo rettangolo BCDE vguale al rettilineo A. Se adunque BE è vguale ad ED sarà fatta la proposizione. Ma se non
3. d. 30 sarà vguale, vna di esse sarà maggiore; Sia la maggiore BE, e prolunghisi in F, in modo che EF sia vguale ad ED. Poi
1. pr. 10. diuisa FB per mezzo in G, e col centro G, ed interuallo GB, o GF descriuasi
pos. 3. il mezzo cerchio BHF, e prolunghisi DE in H, e tirisi GH, sarà il quadrato di EH il ricercato. Perche la linea retta BF è diuisa in parti vguali nel punto G, ed in parti disuguali in E, sarà il rettangolo BEF insieme col quadrato di EG vguale al quadrato di GF, cioè di GH: mà al quadrato di GH sono vguali i quadrati di HE, e di GE; il rettangolo dunque BEF insieme col quadrato di GE è vguale a' quadrati di HE, e GE; traggasi il quadrato di GE commune; adunque il rettangolo rimanente BEF è vguale al quadrato di EH, il che si douea fare.

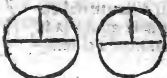
Fine del Secondo Libro.

DE GLI ELEMENTI D'EVCLIDE

LIBRO TERZO.

DIFFINIZIONI.

1 I Cerchi vguali sono quelli, che hanno i diametri, ouero semidiametri vguali.



2 La linea retta si dice toccare il cerchio, la quale toccandolo, e prolungata non lo sega.



3 Li cerchi si dicono toccarsi frà loro, quando toccandosi non si segano.



4 Le

4 Le linee rette nel cerchio si dicono esser vgualmente distanti dal centro, quando le perpendicolari tirate dal centro sopra quelle sono vguali.



5 Quella linea si dice essere più distante dal cétro, sopra la quale cade la perpendicolare maggiore.



6 La porzione del cerchio è vna figura contenuta da vna linea retta, e da quella parte di circonferenza, che viene tagliata dalla sudetta linea retta.





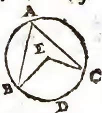
7 L'angolo della porzione è quello che si comprende dalla linea retta, e dalla circonferenza del cerchio.



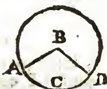
8 L'angolo nella porzione è come l'angolo BAC, cioè quello, che si contiene da due linee rette tirate da vn punto A della circonferenza per fino a' termini della linea BC, che è base di detta porzione.



9 Ma quando le linee rette AB, ed AC, che contengono l'angolo, pigliano vna parte della circonferenza BDC, sopra quella si dice fermarsi l'angolo tanto nella porzione BAC, quanto al centro BEC.



10 Il settore del cerchio è vna figura contenuta dalle linee rette, che partitesi dal cẽtro fanno vn'angolo, e dalla circonferenza presa da esse, come la figura BACD.



11 Le porzioni simili de cerchi sono quelle, che riceuono angoli vguali, ouero sopra le quali si fermano angoli vguali o al centro, o alla circonferenza.






Probl. 1. Prop. 1. Ritrouare il centro del dato cerchio ABC.



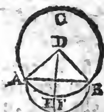
1. pr. 10. Tirisi in esso la retta linea AB come si voglia, e seghisi per mezo nel punto D, dal quale s'alzi la perpen-
1. pr. 11. dicolare DC, la quale si prolunghi fino ad E, e seghisi
pos. 1. la CE per mezo nel punto F. Dico che 'l punto F è centro del dato cerchio ABC. Imperocche se non è F, sia il punto G, e giunganfi GA, GD, GB; adunque perche la AD è fatta vguale alla DB, ed è comune la GD, e la base
1. d. 15. GA è vguale alla GB, sarà l'angolo
1. pr. 8. GDA vguale all'angolo GDB; adun-
1. d. 10. que sarà retto; adunque vguale all'angolo ADC, che è stato fatto retto, il maggiore vguale al minore, il che è impossibile; adunque è impossibile, che altro punto fuori, che F sia centro del circolo ABC, il che bisognaua dimostrare.

COROLLARIO.

DA questo si comprende, che se nel cerchio vna linea retta sega vn'altra retta per mezzo, ed ad angoli retti, il centro del cerchio è nella linea, che sega.

Theor.

Theor. 1. Prop. 2. Nella circonferenza del cerchio ABC piglinſi due punti come ſi voglia A, B. Dico che la linea AB, che congiungerà detti punti, caderà dentro del cerchio.



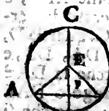
IMperocche ſe egl'è poſſibile caggia di fuori, come AEB, e preſo il centro del cerchio ABC, qual ſia D, giungaſi DA, DB, e prolunghiſi DF in E. Perche la DA è vguale alla DB, ſarà l'angolo DAE vguale all'angolo DBE: e perche ſi prolunga il lato AE del triangolo DAE in B, ſarà l'angolo DEB maggiore dell'angolo DAE interiore, ed oppoſto; ma queſto è vguale all'angolo DBE, onde l'angolo DEB è maggiore dell'angolo DBE, perciò il lato DB, che ſe gl'oppone è maggiore del lato DE; ma DB è vguale a DF, e perciò la DF è maggiore della DE la parte maggiore del tutto, adunque è impoſſibile, che cadi fuori del cerchio, il che ſi douea prouare.

ant. *1.pr.5.* *1.pr.16.* *1.pr.5.* *1.pr.18.*



Theor.

Theor. 2. Propos. 3. Se nel cerchio ADBC la linea CD, che passa per lo centro seghi per mezzo la retta AB non tirata per lo centro nel punto F. Dico che la sega ad angoli retti: di più se la sega ad angoli retti, dico, che la sega ancora per mezzo.

3.II.1. 

Trouisi il centro del cerchio ADBC, che sia E, e giunganſi EA, ed EB. Perche AF ſi preſupone eguale alla FB, e la FE comune, e la baſe EA è vguale alla baſe

1.d.15 EB, ſarà l' angolo AFE vguale all' an-
1.pr.8. golo BFE, e perciò ambedue retti, che
1.d.10 ſi douea per la prima parte dimoſtrare.

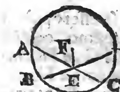
Ma ſiano i ſudetti angoli retti, dico, che eziandio la AF è vguale alla FB.

1.d.15 Perche la EA è vguale alla EB, ſarà l'
1.pr.5. angolo EAF vguale all'EBF, e l' angolo AFE retto vguale al retto BFE;
1.pr.26. adunque i due triangoli EAF, ed EBF ſaranno vguali, ed il lato AF ſarà vguale al lato FB, il che ſi douea ſecondariamente dimoſtrare.



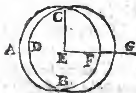
Theor.

Theor. 3. Prop. 4. Nel cerchio ABCD le due linee AC, e BD non tirate per lo centro si taglino nel punto E, dico, che non si tagliano per mezzo.



DAL centro F si tiri la linea FE; se AE fusse vguale ad EC sarebbe l'angolo AEF retto, similmente se BE fusse vguale ad ED sarebbe l'angolo BEF retto, e perciò vguale all'angolo AEF il tutto vguale alla parte, il che è impossibile, adunque è impossibile, che vicendeuolmente si taglino per mezzo, il che si douea dimostrare. *ant.*

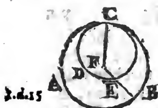
Theor. 4. Prop. 5. Si taglino i due cerchi ABC, e CDB ne' punti BC. Dico, che nō hanno il medesimo centro.



IMperocche sia, se esser può il cētro E, e tirisi EC, ed EG, sarà EC vguale ad EF, ed ad EG per *1.d.15* essere tirate dal centro del cerchio alla circonferenza; adunque EF sarà vguale ad EG, la parte al tutto, il che è impossibile; adun- *as. 1.* que è impossibile, che e' sia il centro comune, il che si douea dimostrare.

Thor.

Theor. 5. Prop. 6. I due cerchi ABC, e CDE si tocchino di dentro nel punto C. Dico, che essi non hanno il medesimo centro.



3.d.15 SIA, se essere può, il medesimo centro F, e tirisi FC, e FB, sarà FC vguale a FE, similmente a FB per essere da' centri alla circonferenza; adunque FE sarà vguale a FB, la parte al tutto, il che è impossi-
4.c. 1. bile; adunque è impossibile, che F sia il comune centro, il che si douea dimostrare.

Theor. 6. Prop. 7. Nel cerchio ABCD sia tirato il diametro AD, ed in esso sia il centro E, e si pigli il punto F, che non sia centro, dal qual punto cadano alcune rette nel cerchio FB, FC, FG. Dico, che la FA, nella quale è il centro è la maggiore di tutte, e la FD residuo del diametro essere la minima, e dell'altre la FB, che s'approssima più alla FA essere maggiore della FC, e la FC della FG, e solamente cadere nel cerchio due eguali dal medesimo punto dall'una, e l'altra parte del diametro.

Per-



Perche FA è vguale alle due FE, EB, e queste sono maggiori della BF, sarà FA maggiore di BF; similmente, perche FA è vguale a FE, EC, e queste sono maggiori di CF, sarà FA maggiore di CF, e nell' istesso modo si dimostra maggiore di FG, che era primieramente da dimostrarsi. Ora perche FE, EB sono vguali ad FE, EC, e queste ad FE, EG, e l'angolo BEF maggiore dell'angolo CEF, e questo dell' angolo GEF, sarà la base BF maggiore della base CF, e questa della base GF, il che si douea nel secondo luogo dimostrare. Ora constituiscasi nella linea EF. e nel punto dato in essa E l' angolo FEH vguale all' angolo GEF, e congiungasi FH. Perche dunque GE è vguale alla EH, e la EF comune, e l' angolo GEF vguale all'angolo HEF, sarà la base FG vguale alla base FH; Dico, che dal F nel cerchio non cade altra linea vguale alla FG, e se esser può cada la FK, & essendo la FK vguale alla FG, e la FH vguale alla FG, sarà la FK vguale alla FH; il che si è dimostrato non esser possibile; adunque dal sudetto punto F possono cadere nel cerchio solamente due linee eguali l'vna d'vna parte, e l'altra dall' altra; il che si douea dimostrare.

1. pr. 20.

1. pr. 24.

1. pr. 23.

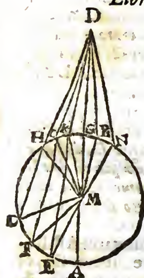
1. pr. 4.

ass. 1.

Theor.

Theor. 7. Prop. 8. Sia il cerchio ABC, fuori del quale si pigli il punto D, e da quello tirinsi nel cerchio alcune linee rette DA, DE, DF, DC, e la DA passi per lo centro; Dico, che di quelle che cadono nella circonferenza concaua, la DA, che passa per lo centro è la maggiore di tutte, e minore di tutte la DG, che è posta frà il punto D, ed il diametro AG; e la DE è maggiore della DF, e la DF maggiore della DC, e sempre la più vicina al diametro maggiore della più remota; E di quelle che cadono nella circonferenza curua, la più vicina alla DG minore di tutte è sempre minore della più lontana, cioè la DK minore della DL, e la DL minore della DH; e che due linee vguali solamente possono cadere dal punto nel cerchio dall'vna, e l'altra parte della minore.

3.pr.1. PIglisi il centro del cerchio, che sia M, e congiunganfi ME, MF, MC,
pos. 1. MK, ML, MH; E perche la AM è
1.d.15 vguale alla ME, pongasi comune la MD, sarà la AD vguale alle EM, MD; ma queste sono maggiori della ED;
1.pr. adunque eziandio la AD è maggiore
20. della ED; e nella medesima maniera si dimostra maggiore dell'altre DF, DC; oltre a ciò, perche le due ME, MD sono



no vguali alle due MF, MD, e l'angolo EMD è maggiore dell'angolo FMD, sarà la base DE maggiore della DF; e simìlmente questa si prouerà maggiore della DC. Poi essendo le M*K*, *K*D maggiori della MD, e la MG vguale alla M*K*, sarà la rimanente *K*D maggiore della rimanente GD; e perciò la GD è minore di tutte. E perche le M*K*, *K*D sono minori delle ML, LD, leuatene le vgnali M*K*, ML, sarà la rimanente D*K* minore della DL, e similmente la DL minore della DH. Dico eziandio, che due sole vguali cadono dal punto D nel cerchio dell'vna, e l'altra parte della minore. Constituiscasi nel*la* linea retta MD, e nel dato punto in essa M, l'angolo DMB vguale all'angolo KMD, e congiungasi DB: perche la MK è vguale alla MB, e la MD comune, e l'angolo KMD, vguale all'angolo BMD, sarà la base DK vguale alla base DB. Dico, che dal punto D niun altra nel cerchio cade vguale alla DB; Caggia se esser può la DN, saranno le due DN, e NM

1. pr. 24.

1. pr. 20.

1. d. 15

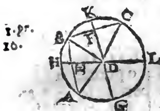
1. pr. 21.

1. pr. 23.

vguali

1.pr. vguali alle due DB, BM, ma sono mag-
31. giori; adunque vguali, e maggiori, il che è impossibile; adunque sarà impossibile, che DN sia vguale alla DB, il che si douea dimostrare.

Theor. 8. Propos. 9. Dentro il cerchio ABC sia preso il punto D, dal quale caggiano nel cerchio più di due linee rette vguali, come DA, DB, DC. Dico che'l punto D è il centro.

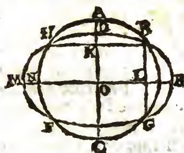


1.pr. 10. Giunganſi AB, BC, e ſeghinſi per mezo ne' punti E, F, e congiunte le ED, DF, prolunghinſi ne' punti G, K, e H, L. Perche AE è fatta vguale alla EB, e la ED comune, e la baſe DA è vguale alla baſe DB, sa-
1.pr.8. rà l'angolo AED vguale all'angolo
1.d.10 BED, e perciò amendue saranno retti,
3.pr.3. e nella linea HL sarà il centro del cerchio. Per la medesima cagione il centro sarà nella linea KG, e le rette linee GK, HL non hanno cosa alcuna comune, fuori, che 'l punto D, perciò questo sarà il centro del cerchio ABC, il che si douea dimostrare.



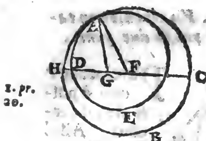
Theor.

Theor. 9. Prop. 10. Vn cerchio non taglia vn' altro in più di due punti.



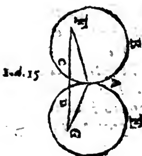
PErciocche s' egli è possibile, il cerchio ABC seghi il cerchio DEF in più di due punti, cioè in BGHF, e giunte le BG, e BH seghinsi per mezzo in KL, ed ad angoli retti dalle linee KC, e LM, nelle quali saranno i centri di ambedue i cerchi; ma non hauendo le sudette linee KC, e LM altro punto, nel quale conuengano, che il punto O, questo sarà centro d'ambidue i cerchi ABC, e DEF, che si segano frà loro, il che è impossibile; adunque sarà ancora impossibile, che si taglino in più, che in due punti, il che si douea dimostrare. *1. pr. 10. 1. pr. 11. 3. cor. pr. 1. 3. pr. 5.*

Theor. 10. Prop. 11. Tocchinsi di dentro due cerchi ABC, ed ADE nel punto A, e piglisi il centro del cerchio ABC, che sia F, ed il centro del cerchio ADE, che sia G. Dico, che la linea retta tirata dal punto F alla G prolungandosi cade nel punto A.



CAda, se sia possibile, come la FGDH, e cõgiunganſi AF, ed AG; e perche le AG, GF ſono maggiori della FA, cioè della
1. pr. 20.
FH, traggaſi la comune FG; adunque la rimanente AG è maggiore della
1. d. 15
GH: ma la AG ſi ſuppone vguale alla GD per eſſere dal centro alla circonferenza. Onde la GD ſarà maggiore della GH, che è impoſsibile; Onde è impoſsibile, che cada fuori del toccamento A, il che ſi douea dimoſtrare.
1. d. 15

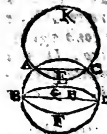
Theor. 11. Prop. 12. Due cerchi ABC, ADE ſi tocchino di fuori nel punto A: e pigliſi il centro del cerchio ABC, che ſia F, & il centro del cerchio ADE ſia G. Dico, che la linea retta tirata dal punto F al G paſſa per lo toccamento.



NON paſsi, ma ſe è poſsibile caggia come FCDG, e giunganſi FA, AG; ſarà la AF vguale alla FC, e la AG vgualē alla GD; adunque tutta la GF ſarà maggiore delle due AF, AG, il
1. d. 15
che

che è impossibile; adunque sarà impossibile che passi per altro luogo, che per lo punto del toccamento A, il che si douea dimostrare. 1. pr. 20.

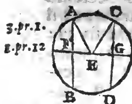
Theor. 12. Prop. 13. Il cerchio non tocca vn' altro cerchio in più d'vn punto, sia, che lo tocchi di dentro, o di fuori.



SE è possibile il cerchio ABDC tocchi il cerchio EBFD prima di dentro in più d'vn punto cioè in BD, e piglisi il centro del cerchio ABDC, che sia G, ed il centro del cerchio EBFD, che sia H; 3. pr. 11.
adunque la linea retta tirata dal punto G all'H caderà ne' punti BD. E perche G è centro del cerchio ABDC, sarà la BG vguale alla GD; adunque la 1.d.15
BG è maggiore della HD; e la BH molto maggiore della HD; ma per esser H 1.d.15
centro del cerchio EBFD, sarà la BH vguale alla HD, vguale è maggiore, il che è impossibile; adunque è impossibile, che vn cerchio tocchi vn' altro per di dentro in più d'vn punto. Ma dico che ne anche di fuori, perciocche se è possibile il cerchio ACK tocchi di fuori il cerchio ABDC ne' due punti AC, e giungasi AC: perche dunque nella circonferenza dell' vno, e l'altro

cerchio si sono presi i due punti AC,
1.pr.2. la linea, che li congiunge caderà dentro all'vno, e all'altro, ma toccando il cerchio ABDC, il cerchio ACK se cade dentro dell'vno dee cadere fuori dell'altro; adunque è impossibile, che tocchi in più di due punti, il che si douea dimostrare.

Theor. 13. Propos. 14. Nel cerchio ABDC siano le linee rette AB, e CD vguali. Dico, che sono vgualmente distanti dal centro. Di più dico, che essendo vgualmente distanti dal centro sono vguali.

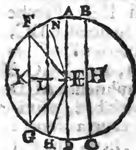


3.pr.1. Piglisi il centro, che sia
1.pr.12 E, dal quale tirinsi EF, ed EG perpendicolari alle AB, e CD, le quali le segheranno per metà ne'
3.pr.3. punti F, G, e AF sarà vguale alla CG; ma AE è vguale alla EC;
as. 7. adunque ancora i loro quadrati, cioè i
1.d.15 quadrati di AF, FE, saranno vguali a'
p. pr. quadrati di CG, EG, si leuino gli egua-
47. li di AF, CG, resterà il quadrato di EF
as. 3. vguale al quadrato di EG; perciò la linea EF vguale alla EG; adunque AB, e CG sono vgualmente distanti dal centro, il che si douea nel primo luogo dimostrare. Ma siano le rette AB, e CD egualmente distanti dal centro,
3.d.4. saranno le EF, EG eguali, ed i quadra-

ti

ti loro eguali sostratti da' quadrati vguali di AE, ed EC lascieranno i quadrati eguali di AF, CG; adunque queste saranno vguali, ma sono la metà delle AB, CD; adunque ancora saranno eguali le linee AB, CD, il che si douea dimostrare. 1. pr. 47. 3. pr. 3. as. 6.

Theor. 14. Propos. 15. Nel cerchio ABCD, il cui centro E. Dico, che'l diametro AD è la maggiore di tutte, e la BC, che è più vicina a detto diametro, maggiore della FG, che è più lontana.



Tirinsi dal centro le EH, ed EK perpendicolari alle BC, e FG; sarà la EK maggiore della EH; pongasi la EL vguale alle EH, e per L si tiri LM ad angoli retti sopra la EK, e si prolunghi in N, e giungansi EM, EN, EF, EG; e perche la EH è vguale alla EL, sarà la BC vguale alla MN, e la AD sarà vguale alle due ME, EN, adunque maggiore della MN, e della BC; ed essendo le due EM, EN vguali alle due EF, EG, e l'angolo MEN maggiore dell'angolo FEG, sarà MN, e BC maggiore di FG, la più prossima al diametro maggiore della più remota, il che si douea dimostrare. 1. pr. 12. 3. d. 5. 1. pr. 12 ant. 1. d. 15 1. pr. 20. 1. pr. 24.

 The-

Theor. 15. Prop. 16. Del cerchio ABC sia il centro D, ed il diametro AB; se dal punto A s'alzerà una perpendicolare; dico, che questa caderà fuori del cerchio, e nel luogo, che è frà la linea retta, e la circonferenza, non cade alcun' altra linea, e che l' angolo del mezzo cerchio è maggiore d'ogni angolo acuto rettilineo, ed il rimanente è minore.



CAda la perpendicolare se è possibile di dentro come AC, e cōgiungasi DC. Perche DA è vguale alla DC, sarà l' angolo DAC v-
1.pr.5. guale all' angolo ACD; ma DAC è supposto retto, onde similmente ACD
1.pr. sarà retto, il che è impossibile; adun-
17. que è necessario, che caggia fuori. Caggia come la AE. Dico, che nel luogo, che è frà la linea retta AE, e la circonferenza CHA non cade altra linea retta; Caggia se è possibile come FA, e dal punto D tirisi la DG perpendicolare alla FA; e perche l' angolo
1.pr. AGD è retto, e DAG minore del ret-
12. to, sarà la AD maggiore della DG, ma
1.pr. la AD è vguale alla DH; Adunque la
19. DH è maggiore della DG, la parte del tutto, il che è impossibile; adunque è impossibile che frà la linea retta AE, e

la

la circonferenza cada altra linea retta. Dico oltre a ciò, che l'angolo del mezzo cerchio contenuto dalla linea retta BA, e dalla circonferenza CHA è maggiore d'ogn' angolo acuto rettilineo, ed il rimanente contenuto dalla circonferenza CHA, e dalla linea retta AE è minore d'ogni angolo acuto rettilineo; imperocche se vi è qualche angolo rettilineo maggiore del contenuto dalla linea retta BA, e dalla circonferenza CHA, e minore del contenuto dalla circonferenza CHA, e dalla linea retta AE, nel luogo, che è frà la circonferenza CHA, e la linea retta AE caderà qualche linea retta, che farà l'angolo maggiore del contenuto dalla linea retta BA, e dalla circonferenza CHA; che è contenuto da linee rette, e minore del contenuto dalla circonferenza CHA, e dalla linea retta AE; ma non ci cade; non farà dunque l'angolo acuto contenuto da linee rette maggiore dell' angolo contenuto dalla retta BA, e circonferenza CHA, e minore del contenuto dalla circonferenza CHA, e dalla retta AE, il che si douea dimostrare.

COROLLARIO.

DI quì si raccoglie, che la linea retta, la qual si tira dall' estremità del diametro ad angoli retti, tocca

Theor. 7. Prop. 8. Sia il cerchio ABC, fuori del quale si pigli il punto D, e da quello tirinsi nel cerchio alcune linee rette DA, DE, DF, DC, e la DA passi per lo centro; Dico, che di quelle che cadono nella circonferenza concaua, la DA, che passa per lo centro è la maggiore di tutte, e minore di tutte la DG, che è posta frà il punto D, ed il diametro AG; e la DE è maggiore della DF, e la DF maggiore della DC, e sempre la più vicina al diametro maggiore della più remota; E di quelle che cadono nella circonferenza curua, la più vicina alla DG minore di tutte è sempre minore della più lontana, cioè la DK minore della DL, e la DL minore della DH; e che due linee vguali solamente possono cadere dal punto nel cerchio dall'vna, e l'altra parte della minore.

3.pr.1. Piglisi il centro del cerchio, che sia M, e congiunganſi ME, MF, MC,
poſ. 1. MK, ML, MH; E perche la AM è
1.d.15 vguale alla ME, pongasi comune la MD, sarà la AD vguale alle EM, MD; ma queste sono maggiori della ED;
1.pr. adunque eziandio la AD è maggiore
20. della ED; e nella medesima maniera si dimostra maggiore dell'altre DF, DC; oltre a ciò, perche le due ME, MD sono



no vguali alle due MF, MD, e l'angolo EMD è maggiore dell' angolo FMD, sarà la base DE maggiore della DF; e similmente questa si prouerà maggiore della DC. Poi essendo le MK, KD maggiori della MD, e la MG vguale alla MK, sarà la rimanente KD maggiore della rimanente GD; e perciò la GD è minore di tutte. E perche le MK, KD sono minori delle ML, LD, leuatene le vguali MK, ML, sarà la rimanente DK minore della DL, e similmente la DL minore della DH. Dico eziandio, che due sole vguali cadono dal punto D nel cerchio dell'vna, e l'altra parte della minore. Constituiscasi nella linea retta MD, e nel dato punto in essa M, l'angolo DMB vguale all'angolo KMD, e congiungasi DB: perche la MK è vguale alla MB, e la MD comune, e l'angolo KMD, vguale all'angolo BMD, sarà la base DK vguale alla base DB. Dico, che dal punto D niun altra nel cerchio cade vguale alla DB; Caggia se esser può la DN, saranno le due DN, e NM vguali

1. pr. 24.

1. pr. 20.

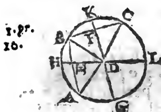
1. d. 15

1. pr. 21.

1. pr. 23.

1.pr. 21. vguali alle due DB, BM, ma sono maggiori; adunque vguali, e maggiori, il che è impossibile; adunque sarà impossibile, che DN sia vguale alla DB, il che si douea dimostrare.

Theor. 8. Propos. 9. Dentro il cerchio ABC sia preso il punto D, dal quale caggiano nel cerchio più di due linee rette vguali, come DA, DB, DC. Dico che 'l punto D è il centro.

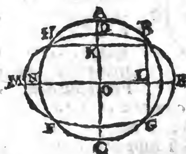


1.pr. 10. Giunganſi AB, BC, e ſeghinſi per mezo ne' punti E, F, e congiunte le ED, DF, prolunghinſi ne' punti G, K, e H, L. Perche AE è fatta vguale alla EB, e la ED comune, e la baſe DA è vguale alla baſe DB, sarà l'angolo AED vguale all'angolo
1.pr.8. BED, e perciò amendue saranno retti,
1.d.10 e nella linea HL sarà il centro del cer-
3.pr.3. chio. Per la medesima cagione il centro sarà nella linea KG, e le rette linee GK, HL non hanno cosa alcuna comune, fuori, che 'l punto D, perciò questo sarà il centro del cerchio ABC, il che si douea dimostrare.



Theor.

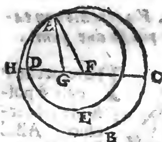
Theor. 9. Prop. 10. Vn cerchio non taglia vn' altro in più di due punti.



PErciocche s' egli è possibile, il cerchio ABC seghi il cerchio DEF in più di due punti, cioè in BGHF, e giunte le BG, e BH seghinsi per mezzo in KL, ed ad angoli retti dalle linee KC, e LM, nelle quali saranno i centri di ambedue i cerchi; ma non hauendo le sudette linee KC,e LM altro punto, nel quale conuengano, che il punto O, questo sarà centro d'ambidue i cerchi ABC, e DEF, che si segano frà loro, il che è impossibile; adunque sarà ancora impossibile, che si taglino in più, che in due punti, il che si douea dimostrare.

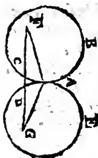
1. pr. 10.
1. pr. 11.
3. cor. pr. 1.
3. pr. 5.

Theor. 10. Prop. 11. Tocchinsi di dentro due cerchi ABC, ed ADE nel punto A, e piglisi il centro del cerchio ABC, che sia F, ed il centro del cerchio ADE, che sia G. Dico, che la linea retta tirata dal punto F alla G prolungandosi cade nel punto A.



CAda, se sia possibile, come la FGDH, e cõgiunganſi AF, ed AG; e perche
1. pr. 20. le AG, GF ſono maggiori della FA, cioè della
1. d. 15 FH, traggaſi la comune FG; adunque la rimanente AG è maggiore della
1. d. 15 GH: ma la AG ſi ſuppone vguale alla GD per eſſere dal centro alla circonferenza. Onde la GD ſarà maggiore della GH, che è impoſsibile; Onde è impoſsibile, che cada fuori del toccamento A, il che ſi douea dimoſtrare.

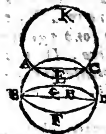
Theor. 11. Prop. 12. Due cerchi ABC, ADE ſi tocchino di fuori nel punto A: e pigliſi il centro del cerchio ABC, che ſia F, & il centro del cerchio ADE ſia G. Dico, che la linea retta tirata dal punto F al G paſſa per lo toccamento.



NON paſsi, ma ſe è poſsibile caggia come FCDG, e giunganſi
1. d. 15 FA, AG; ſarà la AF vguale alla FC, e la AG vguale alla GD; adunque tutta la GF ſarà maggiore delle due AF, AG, il che

che è impossibile; adunque sarà impossibile che passi per altro luogo, che per lo punto del toccamento A, il che si douea dimostrare. 1. pr. 20.

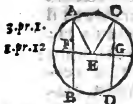
Theor. 12. Prop. 13. Il cerchio non tocca vn'altro cerchio in più d'vn punto, sia, che lo tocchi di dentro, o di fuori.



SE è possibile il cerchio ABDC tocchi il cerchio EBFD prima di détro in più d'vn punto cioè in BD, e piglisi il centro del cerchio ABDC, che sia G, ed il centro del cerchio EBFD, che sia H; 3. pr. 11.
adunque la linea retta tirata dal punto G all'H caderà ne' punti BD. E perche G è centro del cerchio ABDC, sarà la BG vguale alla GD; adunque la 1.d.15
BG è maggiore della HD; e la BH molto maggiore della HD; ma per esser H 1.d.15
centro del cerchio EBFD, sarà la BH vguale alla HD, vguale è maggiore, il che è impossibile; adunque è impossibile, che vn cerchio tocchi vn' altro per di dentro in più d'vn punto. Ma dico che ne anche di fuori, perciocche se è possibile il cerchio ACK tocchi di fuori il cerchio ABDC ne' due punti AC, e giungasi AC: perche dunque nella circonferenza dell'vno, e l'altro

cerchio si sono presi i due punti AC,
3.pr.2. la linea, che li congiunge caderà dentro all'vno, e all'altro, ma toccando il cerchio ABDC, il cerchio ACK se cade dentro dell'vno dee cadere fuori dell'altro; adunque è impossibile, che tocchi in più di due punti, il che si douea dimostrare.

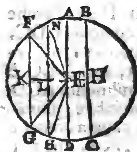
Theor. 13. Propos. 14. Nel cerchio ABDC siano le linee rette AB, e CD vguali. Dico, che sono vgualmente distanti dal centro. Di più dico, che essendo vgualmente distanti dal centro sono vguali.



3.pr.1. 3.pr.12 Piglisi il centro, che sia E, dal quale tirinsi EF, ed EG perpendicolari alle AB, e CD, le quali le segheranno per metà ne'
3.pr.3. punti F, G, e AF sarà vguale alla CG; ma AE è vguale alla EC;
as. 7. adunque ancora i loro quadrati, cioè i
1.d.15 quadrati di AF, FE, saranno vguali a'
p. pr. quadrati di CG, EG, si leuino gli egua-
47. li di AF, CG, resterà il quadrato di EF
as. 3. vguale al quadrato di EG; perciò la linea EF vguale alla EG; adunque AB, e CG sono vgualmente distanti dal centro, il che si douea nel primo luogo dimostrare. Ma siano le rette AB, e CD egualmente distanti dal centro,
3.d.4. saranno le EF, EG eguali, ed i quadra-
ti

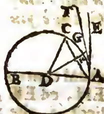
ti loro eguali sottratti da' quadrati 1. 47.
vguali di AE, ed EG lascieranno i qua-
drati eguali di AF, CG; adunque que- 3. pr. 3.
ste saranno vguali, ma sono la metà
delle AB, CD; adunque ancora saran-
no eguali le linee AB, CD, il che si do- as. 6.
uea dimostrare.

Theor. 14. Propos. 15. Nel cerchio ABCD, il cui centro E. Dico, che'l diametro AD è la maggiore di tutte, e la BC, che è più vicina a detto diametro, maggiore della FG, che è più lontana.



Tirinsi dal centro
le EH, ed EK 1. pr. 12.
perpendicolari alle
BC, e FG; sarà la 3. d. 5.
EK maggiore della
EH; pongasi la EL
vguale alle EH, e
per L si tiri LM ad 1. pr. 11
angoli retti sopra la EK, e si prolunghi
in N, e giunganfi EM, EN, EF, EG;
e perche la EH è vguale alla EL, sarà ant.
la BC vguale alla MN, e la AD sarà 1. d. 35
vguale alle due ME, EN, adunque
maggiore della MN, e della BC; ed es- 1. pr. 20.
sendo le due EM, EN vguali alle due
EF, EG, e l'angolo MEN maggiore 1. pr. 24.
dell'angolo FEG, sarà MN, e BC mag-
giore di FG, la più prossima al diame-
tro maggiore della più remota, il che si
douea dimostrare. D 3 The-

Theor. 15. Prop. 16. Del cerchio ABC sia il centro D, ed il diametro AB; se dal punto A s'alzerà vna perpendicolare; dico, che questa caderà fuori del cerchio, e nel luogo, che è frà la linea retta, e la circonferenza, non cade alcun' altra linea, e che l'angolo del mezzo cerchio è maggiore d'ogni angolo acuto rettilineo, ed il rimanente è minore.



CAda la perpendicolare se è possibile di dentro come AC, e cógiungasi DC. Perche DA è vguale alla DC, sarà l'angolo DAC v-
1.pr.5. guale all'angolo ACD; ma DAC è supposto retto, onde similmente ACD
1.pr. 17. sarà retto, il che è impòssibile; adunque è necessario, che caggia fuori. Caggia come la AE. Dico, che nel luogo, che è frà la linea retta AE, e la circonferenza CHA non cade altra linea retta; Caggia se è possibile come FA, e dal punto D tirisi la DG perpendicolare alla FA; e perche l'angolo
1.pr. 12. AGD è retto, e DAG minore del retto, sarà la AD maggiore della DG, ma
1.pr. 19. la AD è vguale alla DH; Adunque la DH è maggiore della DG, la parte del tutto, il che è impossibile; adunque è impossibile che frà la linea retta AE, e

la

la circonferenza cada altra linea retta. Dico oltre a ciò, che l'angolo del mezzo cerchio contenuto dalla linea retta BA, e dalla circonferenza CHA è maggiore d'ogn'angolo acuto rettilineo, ed il rimanente contenuto dalla circonferenza CHA, e dalla linea retta AE è minore d'ogni angolo acuto rettilineo; imperocche se vi è qualche angolo rettilineo maggiore del contenuto dalla linea retta BA, e dalla circonferenza CHA, e minore del contenuto dalla circonferenza CHA, e dalla linea retta AE, nel luogo, che è frà la circonferenza CHA, e la linea retta AE caderà qualche linea retta, che farà l'angolo maggiore del contenuto dalla linea retta BA, e dalla circonferenza CHA, che è contenuto da linee rette, e minore del contenuto dalla circonferenza CHA, e dalla linea retta AE; ma non ci cade; non sarà dunque l'angolo acuto contenuto da linee rette maggiore dell'angolo contenuto dalla retta BA, e circonferenza CHA, e minore del contenuto dalla circonferenza CHA, e dalla retta AE, il che si douea dimostrare.

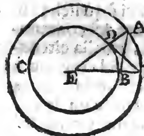
COROLLARIO.

DI quì si raccoglie, che la linea retta, la qual si tira dall'estremità del diametro ad angoli retti, tocca

il cerchio in vn sol punto; perciocche quella, che passa per due punti cade di dentro, come si è dimostrato.

Probl. 2. Prop. 17. Tirare dal punto A vna retta, che tocchi il cerchio BCD.

3.pr.1.

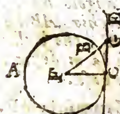


Pigliſi il centro del cerchio E, e congiunta la AE, che tagli il cerchio in D, e dal centro E con l'interuallo EA deſcriuaſi il cerchio AFG, e
poſ.3. dal punto D tiriſi la DF ad angoli retti
1.pr. ſopra la EA, e congiungaſi EBF. Di-
11. co, che dal punto A tirando la AB toccherà il cerchio BCD: Perciocche eſſendo E centro de' cerchi BCD, AFG,
1.d.15 ſarà la EA vguale alla EF, e la ED vguale alla EB, e l'angolo AEF comune, adunque la baſe DF è vguale alla
1.pr.4. baſe AB, ed il triangolo DEF vguale al triangolo EBA; e perciò l'angolo EBA è vguale all'angolo EDF; ed eſſendo fatto l'angolo EDF retto, ancora l'angolo EBA ſarà retto, ed EB è ſemidiametro, adunque la AB toccherà il cer-
ant. chio, il che ſi douea dimoſtrare.

***

Theor.

Theor. 16. Prop. 18. La linea retta DE tocchi 'l cerchio ABC nel punto C, e dal centro F tirisi la FC. Dico questa essere perpendicolare alla DE.



SE non è così, tirisi la FG perpendicolare alla DE. Perche dunque l'angolo FGC si dice retto, sarà GCF acuto, e perciò l'angolo FGC sarà maggiore dell'angolo FCG; adunque FC sarà maggiore della FG, ma la FC è vguale alla FB, onde la FB sarà maggiore della FG, la parte maggiore del tutto, il che è impossibile, adunque altra fuori, che la FC non può essere perpendicolare alla DE, il che si douea dimostrare.

1. pr. 12.
1. pr. 19.
1. di 15

Theor. 17. Prop. 19. Se vna linea retta DE tocchi il cerchio ABC nel punto C, dal quale s'inalzi la CA perpendicolare alla DE. Dico il centro del cerchio essere nella AC.

1. pr. 11.



SE non è, sia se è possibile il centro F, e giungasi CF, questa sarà perpēdicolare alla DE, adunque l'ango-

ant.

D 5 lo

lo FCE sarà retto, ed vguale all'angolo ACE, il che è impossibile; adunque è impossibile, che sia il centro in F, e similmente si dimostrerà impossibile, che sia in alcun'altro punto fuori della linea AC, il che si douea dimostrare.

Theor. 18. Prop. 20. L'angolo BEC, ch'è al centro del cerchio ABC è doppio dell'angolo BAC, che è alla circonferenza, ed hà la medesima circonferenza BC per base.

1.d.15



Giungasi la AE, e prolunghisi in F; e perche la EA è vguale alla EB, sarà l'angolo EAB vguale all' angolo EBA; ma

1.pr.5.

l'angolo BEF è vguale a gli ango-

1.pr. 32.

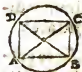
li EAB, ed EBA, adunque l'angolo BEF è doppio dell' angolo EAB; e per la medesima ragione l'angolo FEC è doppio dell'angolo EAC; onde tutto l'angolo BEC è doppio di tutto l'angolo BAC. Pieghisi poi, e sia vn'altr'angolo BDC, e giunta la DE prolunghisi sino in G; dimostreremo similmente, che l'angolo GEC è doppio dell' angolo EDC, de quali GEB è doppio dello EDB; adunque il rimanente BEC, che è al centro è doppio del rimanente BDC, che è alla circonferenza, il che si douea dimostrare. *Theor.*

Theor. 19. Prop. 21. Nella medesima porzione BAED del cerchio ABCDE siano gli angoli BAD, BED. Dico che quelli frà loro sono vguali.



PIglisi il centro del cerchio, che sia F, e giunganſi BF, FD, l'angolo BFD al centro, sarà doppio tanto dell'angolo BAD, quanto dell'angolo BED alla circonferenza, auendo la medesima circonferenza BCD per base; adunque gli angoli BAD, e BED sono vguali, il che si douea dimostrare. *3. pr. 1.* *ant.* *as. 7.*

Theor. 20. Prop. 22. Sia nel cerchio ABCD descritto il quadrilatero ABCD. Dico, che due angoli di esso opposti vniti insieme sono vguali a due retti.



GIungasi AC, BD, saranno i trè angoli CAB, ABC, BCA del triãgolo ABC vguali a due retti; ma l'angolo CAB è vguale all'angolo BDC, essendo nella medesima porzione; similmente l'angolo ACB è vguale all'angolo ADB, adunque tutto l'angolo ADC è vguale agl'angoli BAC, ACB; pongasi l'angolo ABC co- *1. pr. 32.* *ant.*

comune, saranno gli angoli ABC, BAC, ACB, che sono vguali a due retti, vguali a gli angoli ABC, ADC; adunque ancor questi saranno vguali a due retti. Similmente dimostraremo, che gli angoli BAD, BCD sono vguali a due retti, il che bisognaua dimostrare.

Theor. 21. Prop. 23. Nella medesima retta linea AB non si possono costituire dalla medesima parte due porzioni di cerchi simili, e disuguali.



Constituiscansi se è possibile, e siano le porzioni ACB, ed ADB, e tirisi ACD, e giungansi CB, BD; perche le porzioni ACB, ed ADB si dicono simili, sarà l'angolo ACB esteriore vguale all'angolo ADB interiore, il che è impossibile; Adunque è impossibile, che sopra l'istessa linea dalla medesima parte si constituiscano due porzioni di cerchi simili, e disuguali, il che si deuea dimostrare.

3.d.11

1.pr. 16.

Theor. 22. Prop. 24. Sopra le linee rette vguali AB, e CD sieno le porzioni de cerchi AFB, e CED simili. Dico essere ancora vguali.





Imperocchè se non sono vguali, intesa

sa la linea AB soprapoſta alla CD, la porzione AFB non ſi adatterà alla porzione CED; Adunque ſopra la medeſima retta ſi potranno conſtituire due porzioni de cerchi ſimili, e diſuguali, il che per l'antecedente ſi è dimoſtrato impoſsibile; ouero due cerchi ſi ſegheranno in più di due punti, come CGD, il che è parimente impoſsibile. 3.pr.12

Probl. 3. Propoſ. 25. Data vna porzione di cerchio ABC deſcriuere il cerchio.







SEghiſi la AC per mezzo in D, ed ad angoli retti, con la linea DB, e giungaſi AB, ed all'angolo DBA ſi faccia vguale l'angolo BAE, caſo, che non ſia vguale l'angolo BAD; Sarà BE vguale alla EA; e perche la AD è fatta vguale alla DC, e la DE comune, e l'angolo ADE vguale all'angolo CDE, ſarà eziandio la baſe AE vguale alla baſe EC; ma ſi è dimoſtrata vguale alla EB; adunque le trè AE, EB, EC ſaranno vguali, ed E ſarà il centro del cerchio ricercato, che deſcritto con l'interuallo di vna delle trè linee AE, EB, EC paſſerà per gli punti ABC della porzione data, il che ſi douea fare.

1.pr.10 1.pr.11 1.pr.23 1.pr.6. 1.pr.4 af.p. 3.pr.9.

Theor.

Theor. 23. Prop. 26. Siano ABC, e DEF due cerchi vguali, ed in eſſi gli angoli BGC, EHF a' centri, e BAC, EDF alle circonferenze vguali; Dico, che le circonferenze BKC, ed ELF, ſopra le quali ſi fermano ſono eguali.

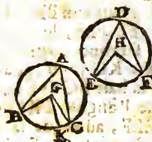


GIunganſi BC, EF, per eſſere i cerchi ABC,
3. d. p. DEF vguali, aueranno i ſemidiametri vguali;
adunque le due BG, GC ſono vguali
1. pr. 4 alle due EH, HF, e l'angolo G vguale
all'angolo H, onde la baſe BC è vguale
alla Baſe EF: oltre di ciò, perche l'angolo A è vguale all' angolo D, la por-
3. d. 11. zione BAC ſarà ſimile alla porzione
EDF, e ſono nelle linee rette vguali
3. pr. 24 BC, EF, adunque ſono vguali frà loro, che leuate da' cerchi ABC, e DEF
vguali laſcieranno la rimanente circonferenza BKC vguale alla rimanen-
Aſſ. 3. te ELF, il che ſi douea dimoſtrare.



Theor.

Theor. 24. Prop. 27. Ne cerchi vguali ABC, DEF, e nelle circonferenze vguali BC, EF, siano gli angoli alli centri BGC, EHF, ed alle circonferenze BAC, EDF. Dico che l'angolo BGC è vguale all'angolo EHF, e l'angolo BAC all'angolo EDF.



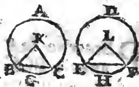
PErocche se l'angolo BGC è vguale all'angolo EHF, è manifesto ancora l'angolo BAC esser vguale all'angolo EDF; ma se non sono vguali vno di essi sarà maggiore; sia l'angolo BGC il maggiore, e si facci l'angolo BGK vguale all'angolo EHF, adunque la circonferenza BK sarà vguale alla circonferenza EF; ma questa si suppone vguale alla BC; adunque la circonferenza BK è vguale alla BC, la parte al tutto, il che è impossibile. Sarà dunque impossibile che l'angolo BGC sia disuguale all'angolo EHF; adunque sarà vguale, ed vguali saranno gli angoli A, & D, che sono le loro metà, il che si douea dimostrare.

3.pr.20

1.pr.23 ant.

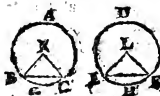
3.pr.20

Theor. 25. Propos. 28. Siano i cerchi ABC, e DEF vguali, ed in essi le vguali rette linee BC, EF. Dico, che la circonferenza BAC maggiore, è vguale alla EDF, e la minore BGC alla minore EHF.

3. pr. 1. 

Piglinsi i centri de' cerchi K, L, e giunganſi BK, KC, EL, LF, le quali ſaranno vguali;
3. d. p. adunque le due BK, KC ſono vguali alle due EL, LF, e la baſe BC è vguale
1. pr. 8. alla baſe EF, onde l'angolo BKC è
3. pr. 26 vguale all'angolo ELF, adunque la circonferēza BGC è vguale alla EHF, le quali leuate dai cerchi vguali laſciano la BAC, vguale alla EDF, il che ſi douea dimoſtrare.

Theor. 26. Propos. 29. Siano i cerchi vguali ABC, DEF, e piglinſi in eſſi le circonferenze BGC, EHF vguali, e giunganſi BC, EF. Dico che la linea retta BC è vguale alla retta EF.



Piglinſi i centri de' cerchi K, L, e giunganſi BK, KC, EL, LF; perche la cir-

circonferenza BGC è vguale alla EHF, sarà l'angolo BKC vguale all' angolo ELF, e per l'vgualità de cerchi ABC, DEF saranno i semidiametri vguali; adunque le due BK, KC sono vguali alle due EL, LF, e contengono angoli vguali, onde la base BC è vguale alla base EF, il che si douea dimostrare. 3.pr.27 3.d.p. 1.pr.4

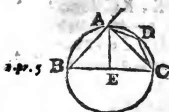
Probl. 4. Propos. 30. Diuidere per mezzo la data circonferenza ADB.



Giungasi AB, e diuidasi per mezzo nel C, dal qual punto tirisi la perpendicolare CD, e giungansi AD, DB; perche le due AC, CD sono vguali alle due BC, CD, e l'angolo ACD vguale all' angolo BCD essendo retti; adunque la base AD è vguale alla base DB, perciò la circonferenza AD sarà vguale alla circonferenza DB, il che si douea fare. p.pr.10 & 11. 1.pr.4 3.pr.28

Theor. 27. Propos. 31. Sia il cerchio ABCD, il cui diametro BC, ed il centro E, e facciasi l'angolo nel semicircolo BAC; dico questo esser retto, e congiunte le AD, e DC. Dico l'angolo nella maggior porzione ABC esser acuto, e quello che è nella minor porzione ADC esser ottuso. Oltre di questo dico l'angolo della por-

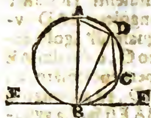
porzione maggiore essere maggior del retto, e quello della minore minor del retto.



3.pr.5 Tirisi la AE, e prolunghisi la BA in F; perche la BE è vguale alla EA, l'angolo EAB sarà vguale all'angolo EBA; similmente si dimostrerà l'angolo ACE vguale all'angolo CAE, adunque l'angolo BAC è vguale a' due ABC, e ACB; adunque la
1.pr.32 metà di due retti; adunque retto, e l'
1.pr.17 angolo ABC sarà acuto, ed il suo complemento a' due retti ADC nel quadri-
3.pr.22 latero ABCD sarà ottuso. Dal che appare, che l'angolo della porzione maggiore supera il retto, e l'angolo della porzione minore manca del retto, es-
3.pr.13 sendo minore dell'angolo CAF retto, il che si douea prouare.

Theor. 28. Prop. 32. Se la linea retta EF tocca il cerchio ABCD, nel punto B, dal quale si tiri nel sudetto cercerchio vna linea retta BD, che lo seghi in qualunque modo; Dico che l'angolo FBD è vguale all'angolo DAB constituita nell' alterno segmento; e similmente l'angolo EBD esser vguale all'angolo DCB posto parimenti nell' alterno segmento.

Alzisi



ALzisi la BA perpendicolare sopra la EF, e preso nella circoferenza BD qual si voglia punto C giunganſi AD, DC, DB. Sarà la BA diametro del cerchio, e per l'antecedente l'angolo ADB sarà retto, e gli angoli rimanenti BAD, ABD insieme vguali ad vn retto. Ma l'angolo ABF è fatto retto, perciò sarà vguale a gli angoli BAD, ABD; trattone il comune ABD, sarà il rimanente DBF vguale all'angolo BAD, che consiste nell'altra porzione del cerchio; & perche nel cerchio è il quadrilatero ABCD, e gli angoli di esso opposti sono vguali a due retti, saranno i due angoli DBF, DBE vguali a' due BAD, BCD, de quali essendosi dimostrato BAD vguale a DBF, sarà il rimanente DBE vguale a quello, che è constituito nell' altra porzione del cerchio DCB, il che si douea dimostrare.

1.pr.11 post.1. 3.pr.19 1.pr.32 as.2. as.3. 3.pr.22 as.3.

Probl. 5. Prop. 33. Sopra la data linea AB descriuere vna porzione di cerchio, che riceua vn' angolo vguale al dato angolo rettilineo C.

SE l'angolo sarà retto, la AB sarà il diametro del cerchio ricercato, altri-

3.pr.16 1.pr.23

trimenti facciasi l'angolo BAD vguale all'ãgolo dato C, e s'inalzi AE
3.pr.11 perpendicolare ad AD, ed all'angolo BAE si faccia vguale
1.pr.23 l'angolo ABF, saranno le due FA, FB vguali; perciò col centro F, ed in-
1.pr.6. teruallo FA, o FB si descriua il cerchio
pos.3. FABI; dico la porzione AIB essere la ricercata.

3.cor. Perche AD tocca il cerchio nel pun-
pr.16. to A, l'angolo AIB sarà vguale all'an-
3.pr.32 golo BAD, cioè all'angolo C, il che si
as.1. doueua fare.

Probl. 6. Prop. 34. Nel dato cerchio ABC tagliare vna porzione, che pigli vn'angolo vguale all'angolo dato D.

3.pr.17 SI tiri EF, che tocchi il dato cerchio
1.pr.23 nel punto B, al quale si constituisca l'angolo FBC vguale al dato ango-
3.pr.32 lo D, questo sarà vguale all'angolo, che

che consiste nell' altra porzione del cerchio; Perciò l' angolo, che si farà nell'altra porzione BAC sarà vguale all'angolo dato D, il che si douea fare. *af. 1.*

Theor. 29. Prop. 35. Nel cerchio ABC siano tirate le due linee rette AB, CD, che si seghino nel punto E. Dico, che'l rettangolo contenuto da' segmenti AE, ed EB è vguale a quello, che si contiene da' segmenti DE, ed EC.



PRima, se le linee ambedue passano per lo centro, e siano diametri, di modo, che E sia centro del cerchio la cosa è manifesta per essere tutti i segmenti vguali. *1. d. 15* *1. d. 2*

Secondo passi per lo centro solamente AB, e tagli CD ad angolo retto in E, la taglierà ancora in due parti vguali; tirisi la FD. Perche la linea AB è diuisa in parti vguali in F, e disuguali in E, sarà il rettangolo fatto dalle parti disuguali AEB, con di più il quadrato di EF vguale al quadrato fatto dalla metà FB, cioè al quadrato di FD; ma questo è vguale a' due quadrati FE, & ED; adunque il rettangolo AEB con di più il quadrato FE sarà vguale al qua- *3. pr. 3* *pos. 1.* *2. pr. 5* *1. pr. 47* *af. 1.*



quadrato FE, con di più il quadrato
as. 3. ED; leuisi il quadrato comune EF, sarà il rettangolo AEB vguale al quadrato ED, cioè al rettangolo CED, il che si douea dimostrare.

Terzo sia AB diametro, e seghi la CD in E inegualmente, e perciò non ad angoli retti, e da
1.pr.12 F si tiri la FG perpendicolare alla CD, e si tiri la linea FD, sarà CG vguale a GD, ed il rettangolo CED cō di più il quadrato GE, sarà vguale al quadrato GD, aggiungasi il quadrato di FG. Sarà il rettangolo CED, con di più i due quadrati di GE, e GF vguale al quadrato di GD, più il quadrato di GF, cioè al quadrato di FD, cioè al quadrato di FB, cioè al rettangolo AEB, con di più il quadrato di FE; ma il quadrato di FE è vguale a' due quadrati di FG, e GE; adunque il rettangolo CED co' due quadrati GE, e GF, sarà vguale al rettangolo AEB, col quadrato FE, cioè co' due quadrati GE, ed EF, i quali essendo comuni, se si leueranno, sarà il rettangolo CED vguale al rettangolo AEB, che si douea dimostrare.

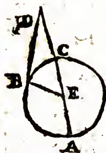
Quarto ne l'vna ne l'altra delle linee AB, e CD passi per lo centro; si tiri la GH, che passi per lo centro F,

Margin notes: pos. 1. (beside "nea FD"); 3.pr.3 (beside "tāgolo CED"); 2.pr.5 (beside "sarà vguale al quadrato GD"); as. 2. (beside "gasi il quadrato"); 1.pr.47 (beside "di FD"); 2.pr.5. (beside "rettangolo AEB"); as. 1. (beside "que il rettangolo"); as. 3. (beside "do comuni").

e

e per lo punto E; farà per le cose dimostrate il rettangolo GEH vguale a' rettangoli AEB, e DEC; adunque il rettangolo AEB sarà vguale al rettangolo DEC, il che si douea dimostrare. *as. 1.*

Theor. 30. Propos. 36. Sia il circolo ABC, fuori del quale sia preso il punto D, e da esso caggiano in detto cerchio due linee rette, vna delle quali sia DCA, che tagli il cerchio, e l'altra sia DB, che lo tocchi; dico che 'l quadrato della DB tangente è vguale al rettangolo fatto da tutta la linea DA, che taglia il circolo, e dalla parte DC presa di fuori frà 'l punto, e la curua circonferenza.



PAssi prima la linea DA per lo centro del cerchio E, e tirisi la EB, farà l'angolo EBD retto, ed il quadrato di ED farà vguale a' due quadrati BD, e BE; similmente il rettangolo ADC con di più il quadrato di EC è vguale al quadrato di ED; mà perche EC è vguale a EB, farà il rettangolo di ADC col quadrato di EC vguale al rettangolo ADC col quadrato di BE; adunque il rettangolo ADC col quadrato di BE, farà eguale al quadrato di ED, cioè a' due quadrati di BD, e BE; *pos. 1.* *3.pr.18* *1.pr.47* *2.pr.6* *1.d.15* *as. 1.*

e se si leuerà il quadrato di BE comune rimarrà il rettangolo ADC eguale al
as. 3. quadrato della tangente BD; il che si douea dimostrare.

pos. 1. Ma se la DA non passa per lo centro, si tirino le DE, EC, EB,
1.pr.12 e la EF perpendicolare alla DA; sarà l'angolo
3.pr.18 EBD retto, e la linea AF sarà vguale alla li-
3.pr.3. nea FC, ed il quadrato BD, più il quadrato EB sarà eguale al
1.pr.47 quadrato DE, & questo è vguale al quadrato EF, più al quadrato FD; ma il quadrato FD è vguale al rettangolo
2.pr.6. ADC con più il quadrato FC; adunque il quadrato di EF, con di più il rettangolo ADC, ed il quadrato di FC sarà vguale al quadrato di DE; ma il quadrato di EF con più il quadrato di
1.pr.47 FC è vguale al quadrato di EC, e ques-
1.d.15. to al quadrato di EB per esser sopra linee eguali; sarà per tanto il rettangolo ADC con di più il quadrato di EB
as. 1. vguale al quadrato di BD, con di più il quadrato di EB, leuisi il comune quadrato di EB; rimarrà il rettangolo ADC eguale al quadrato BD, il che si
as. 3. douea dimostrare.

COROLLARIO I.

QVindi è manifesto se da vn punto preso fuori d'vn circolo caderan-

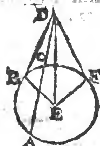
no

no più linee rette, che taglino il circolo, i rettangoli compresi sotto le linee intiere, e le parti esterne saranno frà di loro eguali; imperocche sono eguali al quadrato della tangente.

COROLLARIO II.

APpare ancora, che le due tangenti, che dal sudetto punto si possono tirare al circolo, sono frà sè vguali.

Theor. 31. Propos. 37. Sia il circolo ABF, nel quale dal punto D preso di fuori cadano due linee rette DCA, che seghi il cerchio, e DB, che s'accosti ad esso, ed il rettangolo ADC sia eguale al quadrato, che si fà dalla DB; dico che la DB è tangente del circolo ABF.



TIrisi la DF, che tocchi il circolo ABF, di più si tirino le linee ED, EB, EF; sarà il quadrato DF vguale al rettangolo ADC; mà abbiamo supposto il quadrato DB esser vguale al rettangolo ADC; adunque il quadrato DF sarà vguale al quadrato DB; adunque DF sarà vguale a DB; mà EB è vguale a EF, se vi si aggiugnerà la ED comune, sarà l'angolo EBD vguale all'angolo EFD,

3. pr. 17.
3. pr. 36.
as. 1.
1. d. 15
1. pr. 8.

E

3. pr. 18. EFD; mà l'angolo EFD è retto; adunque ancora l'angolo EBD sarà retto,
3. pr. 16. e DB sarà tangente del circolo ABF, il che si douea dimostrare.

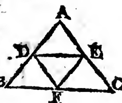
Fine del Terzo Libro.

DE GLI ELEMENTI D'EVCLIDE LIBRO QVARTO.

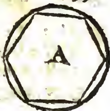
DIFFINIZIONI.

La figura rettilinea si dice esser inscritta in vn' altra figura rettilinea, quando ciascun' angolo della figura inscritta tocca ciascun lato di quella, nella quale è inscritta.

2 Similmente la figura si dice esser circonscritta intorno ad vn' altra figura, quando ciascun lato della figura circonscritta tocca ciascun' angolo di quella, intorno alla quale essa è circonscritta.

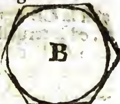


Come per essempio il triangolo DEF si dice inscritto nel triangolo ABC, ed il triangolo ABC circonscritto al triangolo DEF.



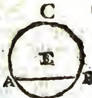
3 La figura rettilinea si dice esser inscritta nel cerchio, quando ciascun angolo della figura inscritta tocca la circonferenza del cerchio, come appare nella figura A.

4 La figura rettilinea si dice esser circonscritta intorno al cerchio, quando ciascun lato della figura circonscritta tocca la circonferenza del cerchio, come appare nella figura B.



5 Il cerchio si dice esser inscritto in vna figura rettilinea, quando la circonferenza del cerchio tocca ciascun lato della figura, nella quale egli è inscritto; come nella figura B.

6 Il cerchio si dice esser circonscritto intorno d' vna figura rettilinea, quando la circonferenza del cerchio tocca ciascun angolo della figura, intorno alla quale egl' è circonscritto, come nella figura A.



7 La linea retta si dice adattarsi nel cerchio, quando l'estremità sue arriuano fino alla circonferenza del cerchio, come la linea AB nel cerchio EABC.

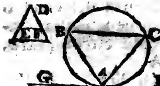
Probl. 1. Propos. 1. Nel dato cerchio ABC adattare vna linea retta vguale alla data D, la quale però non dee essere maggiore del diametro.



Tirisi il diametro BC, e se questo sarà vguale alla D, il Problema sarà fatto; mà se BC è maggiore della D, pongasi la CE vguale alla D, e col centro C, ed interuallo CE descriuasi il cerchio AEF, e giungasi CA, la quale sarà eguale alla CE, e conseguentemente alla data D, il che si doueua fare.

1. pr. 3. pos. 3. 1. d. 15 as. 1.

Probl. 2. Prop. 2. Nel dato cerchio ABC descriuere vn triangolo equiangolo al dato triangolo DEF.

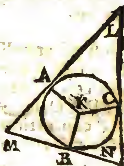


3. pr. 17. Tirisi la linea retta GHA, che tocchi il cerchio ABC nel punto A, al qual punto constituiscasi l'angolo HAC
1. pr. 23. vguale all'angolo DEF, e l'angolo GAB vguale all'angolo DFE, e giun-
3. pr. 32. gasi BC; sarà l'angolo HAC vguale all'angolo ABC, ch'è nell'altra porzione del cerchio; mà l'angolo HAC è fatto
as. 1. vguale all'angolo DEF, adunque l'angolo

golo ABC è vguale all'angolo DEF; per la medesima ragione l'angolo ACB sarà vguale all'angolo DFE, e perche tutti trè gli angoli d'vn triangolo sono vguali a due retti, sarà il rimanente BAC vguale al rimanente EDF, ed il triangolo ABC descritto nel cerchio ABC sarà equiangolo al triangolo dato DEF, il che si douea fare. 1. pr. 32.

Probl. 3. Propos. 3. Circonscriuere d'intorno al cerchio dato ABC vn triangolo equiangolo al triangolo DFE.

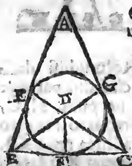




PRolunghisi da ciascuna parte la EF ne' punti H, G, e ritrouato il centro del cerchio K, si tiri la linea retta KB, come si vuole, ed al punto K si faccia l'angolo BKA vguale all'angolo DEG, e l'angolo BKC vguale all'angolo DFH, e da' punti A, B, C, si tirino le perpendicolari LAM, MBN, NCL, che toccheranno il cerchio ABC; e perche i quattro angoli del quadrilatero MBKA sono vguali a quattro retti, diuidendosi in due triangoli, gli angoli de quali KAM, e KBM sono retti, 3. pr. 1. 1. pr. 23. 1. pr. 11. 3. pr. 18. 1. pr. 32.

i rimanenti AKB, ed AMB saranno eguali a due retti; e perciò a' due angoli DEG, DEF, de quali KAB è vguale
as. 3. a DEG, il rimanente dunque AMB sarà vguale al rimanente DEF; E parimente si prouerà, che l'angolo LNB è vguale all'angolo DFE; adunque il rimanente MLN è vguale al rimanente
as. 3. EDF, ed il triangolo LMN circonscritto al dato cerchio ABC sarà equiangolo al dato triangolo DEF, il che si douea fare.

Probl. 4. Prop. 4. Nel dato triangolo ABC descriuere vn cerchio.



SEghinsi gli angoli ABC, e BCA per mezzo con le linee
1. pr. 9. rette BD, CD, le quali concorrino insieme nel punto D, dal quale tirinsi le DE, DF, DG perpendicolari a'
1. pr. 12. lati del triangolo; e perche l'angolo ABD è vguale all'angolo CBD, e l'angolo retto BED vguale al retto BFD, saranno due triangoli EBD, DBF, ch' hanno due angoli vguali a due angoli, ed vn lato vguale ad vn altro, cioè il comune BD, che è sottoposto ad vno de gli angoli vguali, adunque saranno gli altri lati vguali a gli altri lati, e sarà

DE

DE vguale a DF; e per la medesima ragione DG sarà vguale a DF, onde DE è vguale a DG, e tutte trè le linee rette DE, DF, DG saranno frà loro vguali; e perciò descriuendosi il cerchio col centro D, ed interuallo di vna di esse passerà ancora per gl'altri punti estremi dell'altre, e toccherà le linee rette AB, BC, CA essendo gli angoli E, F, G retti, e sarà il cerchio inscritto nello dato triangolo ABC, il che si doueua fare. 1.pr. 26. af. 1. pos. 3. 3.pr. 16.

Probl. 5. Propos. 5. Intorno al dato triangolo ABC circonscriuere vn cerchio.

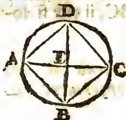




Diuidasi il lato AB per metà in D, ed il lato AC in E, ne quai punti D, ed E s'alzino le perpendicolari DF, ed EF, che concorrino nel punto F, dal quale si tirino le linee FA, FB, FC, e si faccia il circolo FABC; Dico questo essere il cerchio ricercato. Perche AD è fatta vguale a DB, e FD commune, e gl'angoli FDA, e FDB retti sono 1.pr. 10. 1.pr. 11. pos. 1. pos. 3. 1.pr.4.

frà loro vguali, farà la base FB vguale alla base FA; similmente si dimostrerà
as. 1. vguale a FA, adunque tutte trè le linee BF, FA, FC faranno frà di loro vguali, & F farà centro del circolo ABC, il quale è circonscritto al dato triangolo
4. d. 6. ABC.

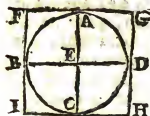
Probl. 6. Propos. 6. Nel dato cerchio ABCD inscriuere vn quadrato.



1. pr. 11. SI tiri il diametro AC, e dal centro E s'alzi la perpendicolare BED, poi si tirino le rette linee AB, BC, AD, DC, e farà fatto il quadrato ABCD ricercato; percioche gli angoli BEA, BEC, AED, CED sono eguali frà di loro per esser retti, adunque le porzioni AB, BC, AD, DC
3. pr. 26. faranno eguali frà di loro, e le rette linee
3. pr. 29. AB, BC, AD, DC faranno eguali frà di loro, e gli angoli BAD, ABC, ADC, BCD sono retti per esser nel semicerchio; adunque ABCD è vn quadrato
1. d. 29 iscritto nel dato cerchio, il che si douea fare.

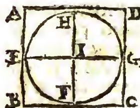
Probl. 7. Propos. 7. Intorno il dato circolo ABC circonscriuere vn quadrato.

pos. 1. SI tiri il diametro BD, e dal centro
1. pr. 11. E s'alzi la perpendicolare AEC, e dal



dal punto B la perpendicolare FBI, e dal punto D la perpendicolare GDH, e dal punto A la perpendicolare FAG, e dal punto C la perpendicolare ICH, dico il
quadrato FIHG essere il ricercato; per- 1.pr.
che le linee FI, AC, GH sono parallele 28.
frà di sè, e similmente le linee FG, BD,
IH saranno gli angoli F, G, I, H retti; 1.pr. 29.
e perche BD è vguale a AC, saranno le 1.d.15
linee FG, BD, IH, FI, AC, GH eguali 1.pr.
frà di sè, e la figura FIHG sarà vn qua- 33. 1.d.29
drato, che tocca il circolo dato ne'
punti ABCD; perciò sarà il sudetto 3.pr.
circolo circonscritto, il che si douea 16. 4.d.4.
fare.

Probl. 8. Prop. 8. Nel dato quadrato ABCD inscriuere vn circolo.



SI diuida la AB 1.pr.
per metà in E, 10.
e la BC in F, e la CD in G, e la DA
in H, e si tirino le pos. 2.
linee HF, ed EG,
che s' intersichino in I; il circolo descritto col centro I, ed interuallo IH
sarà il ricercato; perche AH, HD, BF, as. 7.
FC, AE, EB, DG, GC sono eguali frà
di sè, ed HF è parallela alle linee AB, 1.pr. 33.

& DC, similmente EG è parallela alle linee AD, e BC saranno i quadrilateri
1.pr. 29. IA, ID, IB, IC parallelogrammi, e le linee IE, IH, IG, & IF essendo vguali a
1.pr. 34. linee vguali saranno eguali frà di loro, perciò il circolo descritto col centro I,
as. 1. ed interuallo IH passerà per i punti E,
4.d.5. F, G, e sarà inscritto nel quadrato BD dato, il che si douea fare.

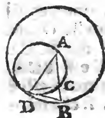
Probl. 9. Prop. 9. Circonscriuere vn cerchio al dato quadrato ABCD.



pos. 1. TIrinsi i diametri AC, BD, e col centro E, ed interuallo EA si descriua il cerchio EABCD, questo sarà il ricercato; perche la DA è vguale alla AB, e la AC comune, e la base BC vguale alla base DC, sarà l'angolo DAC vguale all'angolo BAC, perciò l'
1.pr.8. angolo BAD sarà tagliatò per metà dalla linea AC, e similmente si dimostrerà, che ciascun angolo ABC, BCD, CDA è segato per mezzo dalle linee rette AC, BD; e perche l'angolo DAB è vguale all'angolo ABC; e l'angolo EAB la metà dell'angolo DAB, e l'angolo EBA dell'angolo ABC, sarà l'angolo EAB vguale all'angolo EBA, on-
as. 7. 1.pr.6. de ancora il lato EA sarà vguale al lato EB;

EB; similmente si prouerà vguale al lato ED, e questo al lato EC, e perciò le quattro linee rette EA, EB, EC, ED saranno frà di loro eguali, e descriuendosi vn cerchio dal centro E con l'interuallo di vna di esse passerà ancora per gli altri punti, e sarà descritto d'intorno al dato quadrato ABCD, il che si douea fare. 4. d.6.

Probl. 10. Prop. 10. Fare il triangolo Isoscele ADB, il quale abbia ciascuno de gli angoli alla base ABD, ouero ADB, che sia doppio del rimanente BAD.



Tirisi la retta linea AB, e si tagli nel punto C di modo, che il rettangolo contenuto da tutta l'AB, e dal minor segmento BC sia vguale al quadrato, che si descriue dal maggior segmento CA, e dal centro A con l'interuallo AB descriuasi il cerchio BDE, nel quale si addatti la retta linea BD vguale alla AC, e giunte DA, DC descriuasi vn cerchio d'intorno al triãgolo ADC; Adunque perche il rettangolo ABC è vguale al quadrato, che si f dall'AC, e l'AC vguale alla BD, sarà il rettangolo ABC vguale al quadrato di BD, perciò la linea retta BD toccherà il cerchio ACD, 2. pr. 11. pos. 3. 4. pr. 1. 4. pr. 5. 3. pr. 37.

ACD, e l'angolo BDC sarà vguale à
3.pr. 32. quello, che è constituito nell'altra porzione, cioè all' angolo DAC; pongasi l'angolo CDA comune, adunque tutto l'angolo BDA è vguale à gli angoli CDA, DAC; mà l'angolo esteriore
1.pr. 32. BCD è vguale a gli angoli CDA, DAC,
as. 1. perciò l'angolo BDA ancora è vguale
1.pr.5. all'angolo BCD; mà l' angolo BDA è vguale all' angolo CBD; adunque DBA sarà vguale a BCD, & i trè angoli BDA, DBA, BCD saranno frà loro vguali, ed il lato BD sarà vguale al lato
1.pr.6. BC; mà BD è posto vguale a CA, adunque eziandio CA è vguale a CD, e l'angolo CDA all'angolo DAC, on-
1.pr.5. de gli angoli CDA, DAC sono doppij dell'angolo DAC, e l'angolo BCD sarà doppio dell' angolo DAC; mà BCD è vguale all'vno, e l' altro di essi BDA, DBA, perciò l'vno, e l' altro di essi è doppio dell' angolo BAD, il che bisognaua fare.

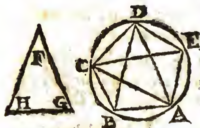
COROLLARIO.

DA quì appare l'angolo BAD esser la quinta parte di duoi retti, essendo tutti trè gli angoli del triangolo eguali a duoi retti.



Probl.

Probl.* 11. *Propos.* 11. *Descriuere vn pẽtagono nel dato cerchio ABCDE.

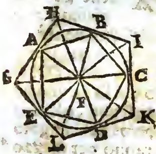


FAcciasi per l'antecedente il triangolo Isosceles FGH, che abbia ciascun angolo alla base doppio del rimanente, e descriuasi nel dato cerchio il triangolo ACD equiangolo al triangolo FGH, *4.pr.2.* di modo che l'angolo CAD sia vguale all'angolo F; adunque l' vno, e l'altro ACD, CDA è doppio dell'angolo CA D, e se si diuideranno per mezzo *as. 6.* con le linee CE, e DB, i cinque angoli DAC, ACE, ECD, CDB, BDA saranno frà di loro vguali, e perciò si fermano sopra le circonferenze vguali, e ti- *3.pr. 26.* rate le linee AB, BC, CD, DE, EA, *3.pr. 29.* queste saranno vguali, ed il pentagono ABCDE sarà equilatero. Dico ancora essere equiangolo, perche essendo la circonferenza AB vguale alla DE, pongasi BCD comune, sarà tutta la circonferenza ABCD vguale a tutta la circonferenza EDCB, ma sopra la circonferẽza ABCD, si ferma l'angolo AED, *3.d.9.* e sopra la circonferenza EDCB si ferma l'angolo BAE, adunqne l'angolo BAE è vguale all'angolo AED; e per

la

la medesima ragione ciascuno de gli angoli ABC, BCD, CDE è vguale a ciascuno di essi BAE, ed AED, perciò il pentagono ABCDE descritto nel cerchio dato è equiangolo, ed equilatero, il che si douea fare.

Probl. 12. Prop. 12. Descriuere vn pentagono equilatero, ed equiangolo intorno al dato cerchio ABCDE.



4. pr. 11. DEscriuasi nel dato cerchio il pentagono equilatero, ed equiangolo ABCDE, e tirinsi dal centro F le linee FA, FB, FC, FD, FE; e dal punto A s'inalzi la perpendicolare GAH, dal
3. pr. 11. punto B la HBI, dal punto C la ICK, dal punto D la KDL, dal punto E la LEG, saranno fatti i triangoli AHB,
pos. 5. BIC, CKD, DLE, EGA, dico il pentagono GHIKL essere il ricercato; tirinsi le linee FG, FH, FI, FK, FL; le linee
pos. 1. GH, HI, IK, KL, LG toccheranno il
3 pr. 16 cerchio, e GA è vguale a GE, HA a HB, IB a IC, KC a KD, LD a LE. L'angolo GFA è vguale all'ăgolo GFE,
1. pr. 8. l'angolo HFA all' angolo HFB, e l'angolo AFE vguale all'angolo AFB, e così degl' altri. Perciò tutti gli angoli al
3. pr. 27. centro GFE, GFA, AFH, e così seguitan-

tan-

tando saranno frà di sè vguali, ed AG sarà vguale ad AH, ed HB a HI, e così seguitando, onde ne segue, che le linee GH, HI, IK, KL, GL sono frà di loro eguali, e perciò il pentagono è equilatero, e similmente gli angoli AHB, BIC, CKD, DLE, EGA per essere composti d'angoli vguali, saranno vguali, e così sarà il pentagono ancora equiangolo, il che si douea fare. *as. 7.* *1. pr. 26.* *as. 2.* *as. 2.*

Probl. 13. Prop. 13. Nel dato pentagono ABCDE descriuere vn cerchio.



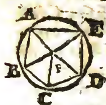
SI diuidano gli angoli BCD, e CDE per metà con le linee rette CF, e DF, e dal punto F, nel quale conuengono tirinsi le rette linee FB, FA, FE; perche dunque la BC è vguale alla CD, e la CF comune, e l'angolo BCF vguale all'angolo DCF, sarà la base BF vguale alla base FD, ed il triangolo BFC vguale al triangolo DCF, e gli altri angoli alli altri angoli; sarà dunque l'angolo CBF vguale all'angolo CDF; e perche l'angolo CDE è doppio dell'angolo CDF, e l'angolo CDE è vguale all'angolo ABC, e l'angolo CDF vguale all'angolo CBF, sarà l'angolo CBA doppio dell'angolo CBF, e però l'angolo ABF è vguale all'ango- *1. pr. 9.* *1. pr. 4.*

lo

lo FBC, adunque l'angolo ABC è diuiso per mezzo dalla retta BF; similmente si dimostrerà, che ciascuno de gli angoli BAE, AED è diuiso per mezzo dalle linee rette AF, FE, onde dal punto F tirinsi alle linee rette AB, BC, CD, DE, EA le perpendicolari FG, FH, FK, FL, FM; perche l'angolo HCF è vguale all'angolo KCF, ed il retto FHC vguale al retto FKC, ed il lato FC è comune, saranno gli altri lati
3. pr. 26. vguali, e la perpendicolare FH sarà vguale alla perpendicolare FK; similmente si dimostrerà che ciascuna di esse FL, FM, FG è vguale all'vna, ed altra FH, FK; adunque le cinque linee rette FG, FH, FK, FL, FM sono trà loro vguali, e però descriuendosi vn cerchio dal centro F con l'interuallo di vna di esse FG, FH, FK, FL, FM passerà per l'estremità loro, e toccherà le linee
3. pr. 16. rette AB, BC, CD, DE, EA, perche le toccha ad angoli retti, perciò nel dato
4. d. 5. pentagono si è descritto il cerchio come si douea fare.

Probl. 14. Prop. 14. D'intorno al dato pentagono ABCDE equilatero, ed equiangolo descriuere vn cerchio.

9. pr. 9. SEghinsi ciascuno de gli angoli BCD, CDE per mezzo con le linee CF, FD, e dal punto F, nel quale conuengono le linee rette, tirinsi le FB,



FB, FA, FE; come si è fatto nell'antecedente, si dimostrerà, che ciascuno de gli angoli CBA, BAE, AED, è segato per mezzo dalle linee BF, FA, FE, e perche l'angolo BCD è vguale all'angolo CDE, e l'angolo FCD è la metà dell'angolo BCD, e l'angolo CDF la metà dell'angolo CDE, sarà l'angolo FCD vguale all'angolo FDC, onde il lato CF è vguale al lato FD; e parimente si dimostrerà, che ciascuna FB, FA, FE è vguale a ciascuna di esse FC, FD; adunque le cinque linee rette FA, FB, FC, FD, FE sono frà loro eguali, onde dal centro F con l'interuallo d'vna di esse descriuendosi vn cerchio passerà ancora per l'estremità dell'altre, e sarà descritto d'intorno al pentagono ABCDE equilatero, ed equiangolo, il che si douea fare. a.s. 6. 4. d. 6.

Probl. 15. Prop. 15. Nel dato cerchio ABDF descriuere vn essagono equilatero, ed equiangolo.



Piglisi il centro del cerchio, che sia G, per lo quale si tiri il diametro AD, e dal centro D con l'interuallo DG descriuasi il cerchio 3. pr. 3.

pos. 3. chio EGCH, e giunte le EG, CG si prolunghino ne' punti B,F, e tirate le linee AB, BC, CD, DE, EF, FA sarà fatto l'essagono equilatero, ed equiangolo, che si douea fare; perciocche essendo il punto G centro del cerchio, la GE sarà vguale alla GD; e perche D è
1.d.15 centro del cerchio EGCH, la DE sarà
1.d.23 vguale alla DG, onde il triãgolo EGD
1.pr.5. sarà equilatero, ed equiangolo; adun-
1.pr. 32. que l'angolo EGD è la terza parte di due retti, e similmente si dimostrerà essere la terza parte di due retti l'angolo DGC; e perche la linea GC stando sopra la retta EB fà gli angoli, che sono
1.pr. 13. da i lati EGC, CGB vguali a due retti, sarà il rimanente ancora CGB la terza parte di due retti; onde gli angoli EGD, DGC, CGB sono frà loro vguali, e perciò gli angoli che sono alla ci-
1.pr. 15. ma di essi saranno e frà sè, ed à essi eguali; adunque gli sei angoli EGD, DGC, CGB, BGA, AGF, FGE sono frà
3.pr. 26. loro eguali; ma gli angoli eguali si fermano sopra circonferenze eguali, adũque le sei circonferenze AB, BC, CD, DE, EF, FA sono frà loro vguali, e le rette linee sottoposte a quelle saranno
3.pr. 29. vguali, perciò l'essagono ABCDEF è equilatero. Dico, che è ancora equiangolo, perciocche essendo la circõferenza AF vguale alla circonferenza ED, ponghisi la circonferenza ABCD commune, tutta adunque la circonferenza

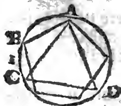
FA-

FABCD è vguale a tutta la circonferenza EDCBA, e l'angolo FED, che si ferma sopra la circonferenza FABCD sarà vguale all' angolo AFE, che si ferma sopra la circonferenza EDCBA; e similmente si dimostreranno gli altri angoli vguali, perciò l'essagono ABCDEF sarà equilatero, ed equiangolo, il che si douea fare. 3.pr.27

COROLLARIO.

DA quì è manifesto che 'l lato dell' Essagono è vguale al semidiametro del cerchio.

Probl. 16. Prop. 16. Nel dato cerchio ABCD descriuere vn quindecagono equilatero, ed equiangolo.



SI faccia nel dato cerchio il lato AC del triangolo equilatero descritto in esso, ed il lato AB del pentagono; adũque di quante parti il cerchio ABCD è quindici, delle medesime la circonferenza ABC, essendo la terza parte del cerchio sarà cinque, e la circonferenza AB che è la quinta parte sarà trè; la rimanente dunque BC è due, perciò seghisi per mezzo nel punto C, onde l'vna, & l'altra delle 4.pr.2. 4.pr.11.

cir-

circonferenze BE, EC è la quinta decima parte del cerchio ABCD; se dunque congiongendo BE, EC accomodaremo linee rette vguali ad esse continuamente nel cerchio ABCD, sarà descritto in esso vn quindecagono equilatero, ed equiangolo, il che si doueа fare.

Fine del Quarto Libro.

DE GLI ELEMENTI D'EVCLIDE

LIBRO QVINTO.

DIFFINIZIONI.

1 La grandezza è parte della grandezza, la minore della maggiore, quando la minore misura la maggiore.

2 La grandezza maggiore è multiplice della minore, quando la minore misura la maggiore.

3 Proporzione, o ragione è vna certa conuenienza di due grandezze del medesimo genere in quanto appartiene alla quantità.

4 Le grandezze si dicono auer proporzione frà se, le quali multiplicate si possono auanzare.

5 Le grandezze si dicono essere nella medesima proportione, la prima alla seconda, e la terza alla quarta, quando le vgualmente multiplici della prima, e della terza, ouero insieme auanzano le vgualmente multiplici della seconda, e della quarta secondo qualsiuoglia multiplicazione, ouero insieme le pareggiano, ouero insieme sono auanzate da loro.

6 Le grandezze, che hanno la medesima proporzione si chiamino proporzionali.

7 Quando delle vgualmente multiplici secōdo qual si voglia multiplicazione, la multiplice della prima auanzerà la multiplice della seconda, e la multiplice della terza non auanzerà la multiplice della quarta, all'ora la prima alla seconda si dirà auer maggior proporzione, che la terza alla quarta.

8 L'Analogia, o proporzionalità è vna somiglianza di proporzioni.

9 L'Analogia consiste almeno in trè termini.

10 Quando trè grandezze sono proporzionali, la prima alla terza si dirà auer doppia proporzione di quella, che hà alla seconda.

11 Quando quattro grandezze sono continuamente proporzionali, la prima alla quarta, si dirà auer tripla proporzione di quella, che hà alla seconda, & sempre vna di più, secondo

che

che l'Analogia procederà auanti.

12 Homologhe, ouero di simil ragione sono le grandezze antecedenti alle antecedenti, & le conseguenti alle conseguenti.

13 La proporzione permutata è quando si piglia l'antecedente all'antecedente, & la conseguente alla conseguente.

14 La proporzione conuersa è quãdo si piglia la conseguente, come l'antecedente all' antecedente, come alla conseguente.

15 La composizione della proporzione è quando si piglia l'antecedente insieme con la conseguente, come vna alla conseguente.

16 La diuisione della proporzione è quando si piglia l'eccesso, nel quale l'antecedente auanza la conseguente ad essa conseguente.

17 La conuersione della proporzione è quando si piglia l'antecedente all'eccesso, nel quale l'antecedente auanza la conseguente.

18 L'vgual proporzione è quando siano più grandezze, & altre grandezze di numero vguali a quelle, che si piglino a due, a due, & nella medesima proporzione, & come nelle prime grãdezze, la prima all' vltima, così nelle seconde grandezze, la prima sia all'vltima, ouero altramente, quando si piglino le grandezze estreme, leuandone quelle, che sono in mezzo.

19 L'Analogia ordinata è quando sia come l'antecedente alla conseguente, così l'antecedente alla conseguente, & come la conseguente ad vn' altra, così la conseguente ad vn' altra.

20 L'Analogia perturbata è quando siano trè grandezze, & siano altre grãdezze di numero vguali, & come nelle prime grandezze l' antecedente alla conseguente, così nelle seconde l'antecedente alla conseguente, & come nelle prime l' antecedente ad vn' altra, così nelle seconde vn' altra all' antecedente.

Theor. 1. Propos. 1. Siano quante grãdezze si vogliano AB, e CD di altretante grandezze E,F ciascuna vgualmente multiplice di ciascuna. Dico, che quante volte la AB è multiplice della E, tante volte le AB, CD insieme sono multiplici delle E,F prese insieme.

A, G, B, E, C, H, D, F

IMperocche diuisa la AB nelle parti vguali alla E, che siano AG, e GB, e la CD diuisa nelle parti vguali alla F, cioè CH, HD, sarà la multitudine delle parti CH, HD vguale alla moltitudine delle AG, GB; e perche la AG è vguale alla E, e la CH alla F, saranno ancora le AG, CH vguali

vguali alle E, F; e per la medesima ragione, saranno anche GB, HD vguali alle E, F; quante parti dunque sono nella AB vguali alla E, tante saranno nelle AB, CD vguali alle E, F. Onde quante volte è multiplice la AB della E, tante volte saranno multiplici le AB, CD, delle E, F, il che si douea dimostrare.

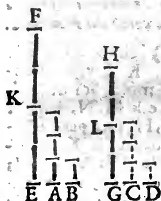
Theor. 2. Propos. 2. Sia la prima AB egualmente multiplice della seconda C, come la terza DE della quarta AF, e la quinta BG egualmente multiplice della seconda C, come la sesta EH della quarta F. Dico ancora composta la prima, & la quinta AG esser egualmente multiplice della seconda C, come la terza, & la sesta DH della quarta F.



PErche essendo AB egualmente multiplice della *C*, come la DE della F, quante grãdezze sono nella AB vguali alla C, tante saranno ancora nella DE vguali alla F; e per la medesima ragione quante sono nella BG vguali alla *C*, tante saranno nella EH vguali alla F; quãte adunque sono in tutta

ta la AG vguali alla C, tante faranno in tutta la DH vguali alla F, onde la AG farà vgualmente multiplice della C, come la DH della F, il che si douea prouare.

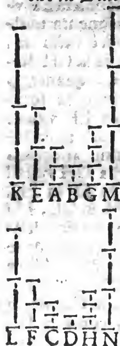
Theor. 3. Propos. 3. Sia la prima A della seconda B egualmente multiplice, come la terza C della quarta D, e piglisi la EF egualmente multiplice della prima A, come la GH della terza C; Dico la EF essere egualmente multiplice della seconda B, come la GH della quarta D.



PErciocche essendo la EF vgualmente multiplice della A, come la GH della C, quante grandezze sono nella EF vguali alla A, tante saranno ancora nella GH vguali alla C; perciò diuidasi la EF in EK, KF vguali alla A, e la GH, in GL, LH vguali alla C; sarà la moltitudine delle EK, KF vguale alla moltitudine delle GL, LH; e perche la A è multiplice della B, come la C della D, e la EK è vguale alla A, e la GL alla C, sarà la EK multiplice della B, come la GL

della D; per la medesima ragione la KF sarà multiplice della B, come LH della D; adunque per l'antecedente sarà la composta EF della seconda B egualmente multiplice, come la composta GH della quarta D, il che si doueca prouare.

Theor. 4. Propos. 4. Abbia la prima A alla seconda B la medesima proporzione, che la terza C alla quarta D, e piglinsi E, F in qualunque modo egualmente multiplici della prima, e terza A, C, & altre G, H in qualunque modo egualmeute multiplici della seconda, e quarta BD; dico che la E alla G è come la F alla H.



Piglinsi ancora le K, L vgualmente multiplici delle E, F, e le M, N, delle G, H; sarà per l'antecedente la K multiplice della A, come la L della C, e per la medesima ragione la M multiplice della B, come la N della D; e perche come la A alla B, così è la C alla D, e si sono prese le K, L egualmente multiplici delle A, C, & altre M, N in qualunque

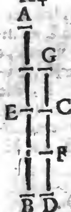
que modo vgualmente multiplici delle B, D, se la K auanza la M, e la L auanzerà la N, e se è vguale, sarà vguale, e se minore, minore; e sono le K, L vgualmente multiplici delle E, F, e le M, N in qualunque modo vgualmente multiplici delle G, H; come adunque la E alla G, così sarà la F alla H, il che si douea prouare. 5. d. 5. 5. d. 7.

COROLLARIO.

DA questo si fà chiaro, che se quattro grandezze siano proporzionali, saranno ancora conuertendosi proporzionali; perche si è dimostrato, che se la K auanza la M; ancora la L auanza la N, e se vguale, vguale, e se minore, minore, è manifesto ancora, che se la M auanza la K, e la N auanzerà la L, e se è vguale, vguale, e se minore, minore; e però come la G alla E, così essere la H alla F, il che si douea prouare. 5. d. 5.

Theor. 5. Propos. 5. Sia la grandezza AB multiplice della grandezza CD, come la parte tratta AE della parte tratta CF; Dico la rimanente EB della rimanente FD essere multiplice, come tutta la AB di tutta la CD.

PErciocche quante volte la AE è multiplice della CF, tante volte si

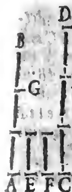


s.pr.1. faccia la EB multiplice della CG; sarà la AE vgualmente multiplice della CF, come tutta la AB di tutta la GF; Ma si pone la AE vgualmente multiplice della CF, come la AB della CD; Adunque la AB è vgualmente multiplice dell'vna, e dell'altra GF, CD; e perciò la GF è vguale alla CD; e toltane la CF comune, sarà la rimanente

as.3. GC vguale alla rimanente DF: onde essendo la AE vgualmente multiplice della CF, come la EB della CG, & la CG vguale alla DF; sarà la AE vgualmente multiplice della CF, come la EB della FD; ma si è posta la AE vgualmente multiplice della CF, come la AB della CD; Adunque la rimanente EB è vgualmente multiplice della rimanente FD, come tutta la AB di tutta la CD, il che si douea prouare.

Theor.6. Propos.6. Sia AB egualmente multiplice di E, come CD di F, e le AG, CH tratte da esse sieno egualmente multiplici delle medesime, dico, che le rimanenti GB, HD sono ouero vguali ad esse EF, o vgualmente multiplici.

PErche la moltitudine delle parti di AB è vguale alla moltitudine delle



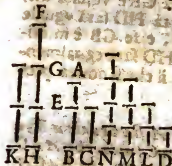
le parti di CD, e la moltitudine delle parti di AG eguale a quella delle parti di CH, sarà il rimanente della moltitudine delle parti di GB vguale alla moltitudine delle parti di HD; adunque se GB è vguale a E, ancora HD sarà vguale ad F, e se GB è multiplice di E, ancora HD sarà egualmente multiplice di F, il che si douea prouare. 5. a. 2. ass. 3.

Theor. 7. Prop. 7. A sia vguale a B, e sia data vn' altra C, dico, che A a C hà l'istessa proporzione, che B a C, e C ad A, come C a B.



Piglinsi le D, E vgualmente multiplici delle A, B, ed vn' altra F, come si voglia multiplice della C, sarà D vguale ad E, perciò se sarà minore, maggiore, o vguale ad F, parimente E sarà minore, maggiore, o vguale all'istessa F; sarà dunque come la A alla C, 5. d. 6. così B a C, e come C ad A, così C a B, che si douea prouare.

Theor. 8. Prop. 8. Siano due grandezze disuguali AB maggiore, e C minore, ed vn' altra D sia come si voglia, dico, che la maggiore AB hà maggior proporzione alla D, che la minore C alla medesima D, e la D hà maggiore proporzione alla minore C, che alla maggiore AB.



Pongasi la BE vguale alla C, e sia prima la AE minore della EB, e multiplichisi l'AE fin tanto, che si faccia maggiore della D, e sia questa la FG; e quante volte la FG è multiplice dell'AE, tante volte si faccia multiplice la GH della EB, e la K della C, e pigliasi la L doppia della D, e la M tripla, e sempre vna più, finche quella, che si piglia sia fatta multiplice della D, e primieramente maggiore della K, e questa sia la N; Perche dunque la K è primieramente minore della N, non sarà la K minore della M; ed essendo la FG vgualmente multiplice della AE, come la GH della
5.pr.1. la EB, sarà ancora la FG vgualmente multiplice della AE, come la FH della AB, e la K della C; e perciò le FH, e K saranno vgualmente multiplici del-

le

le AB, C. Oltre a ciò, perche la GH è vgualmente multiplice della EB, come la K della C, & è la EB vguale alla C, sarà anche la GH vguale alla K; ma la K non è minore della M, adunque la GH non è minore della M; ma la FG è maggiore della D, onde tutta la FH sarà maggiore di amendue DM, mà queste sono vguali alla N, onde la FH auanza la N, ma la K non auanza la N, e sono FH, e K delle AB, è C, ed vn' altra N, comunque si voglia multiplice della D; adunque l' AB hà maggior proporzione alla D, che la C alla D. Dico ancora la D alla C auer maggior proporzione, che la D alla AB; perciocche facendosi le medesime cose la N multiplice della D auanza la *K*, e non auanza la FH, adunque la D hà maggiore proporzione alla C, che alla AB; ma sia la AE maggiore della EB, multiplichisi la minore EB sin tanto che si faccia la GH maggiore della D, e quante volte la GH è multiplice della EB, tante volte facciasi la FG multiplice della AE, e la *K* della C; dimostreremo similmente le FH, e K essere vgualmente multiplici delle AB, è C; piglisi poi la N multiplice della D, e primieramente maggiore della FG, adunque la FG non è minore della M, ed è la FG maggiore della D, onde tutta la FH auanza la DM, cioè la N, e la K non auanza la

5. d. 7.

5. d. 7.

5. pr. 2.

N, perche la FG essendo maggiore della GH, cioè della *K*, non auanza la M, e perfezionando la dimostrazione, come di sopra resterà prouato ciò che si douea prouare.

Theor. 9. Prop. 9. Siano due grandezze A, B, ciascuna delle quali abbia la medesima proporzione ad vn' altra C, dico, che la A è vguale alla B.

ant. A B C

PErche se non fosse vguale non auerebbe ciascuna di esse la medesima proporzione alla C.

Di più dico, che se C hà la medesima proporzione a ciascuna di esse A, B la A è vguale alla B.

ant. Imperciocche se non è così, la C non auerà la medesima proporzione a ciascuna di esse AC, il che si douea dimostrare.

Theor. 10. Propos. 10. Abbia la grandezza A alla C maggior proporzione, che la B alla medesima C, dico, che la A è maggiore della B.

5.pr.7. A B C
5.pr.8.

IMperocche se fosse vguale auerebbe la medesima proporzione, e se fosse minore auerebbe minor proporzione; adunque è maggiore, il che si douea prouare.

Di-

Dico di più, che se la C hà maggior proporzione alla B, che alla A, la B essere minore della A.

Imperocche se fosse vguale, la C auerebbe ad esse l'istessa proporzione, e se B è maggiore della A, la C auerebbe minor proporzione alla B, che alla A, il che è contra alla supposizione; adunque B sarà minore della A, il che si doueua prouare. 5.pr.7. 5.pr.8.

Theor. 11. Prop. 11. Sia come la grandezza A alla B, così la C alla D; e come C alla D, così E alla F, dico come la A alla B, così essere la E alla F.

G A B E

H C D M

Piglinsi le G, H, K vgualmente multiplici delle ACE; e delle BDF piglinsi altre in qualsiuoglia modo vgualmente multiplici L, M, N; se la G auanza la L, e la H auanzerà la M; e se è vguale, sarà vguale; e se minore, minore; similmente se la H auanza la M, e la K auanzerà la N, e se è vguale, sarà vguale, se minore, minore, onde se la G auanza la L, e la K auanzerà la N, e se vguale, vguale, e se minore, minore, e sono le G, 5.def.5.

K vgualmente multiplici delle A, E, & le L, N delle B, F, altre in qualunque modo vgualmente multiplici; adunque come la A alla B, così sarà la E alla F, il che si douea prouare.

5. d.5.

K E F N

Theor. 12. Propos. 12. Siano quante grandezze si voglino proporzionali A, B, C, D, E, F, e come la A alla B, così sia la C alla D, e la E alla F, dico, come A alla B così essere le A, C, E alle B, D, F insieme vnite.

G A B L H C D M

5. d.5.

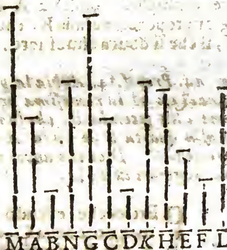
Piglinsi G, H, K vgualmẽte multiplici delle A, C, E, e delle B, D, F, altre in qualunque modo vgualmẽte multiplici L, M, N; se la G auanza la L, e la H auanzerà la M, e la K la N, e se vguale, sarà vguale, se minore, minore, onde se la G auanza la L, e le GHK auanzeranno le LMN, e se vguali, saranno vguali, se minori, minori, e sono le G, e G, H, K, delle A, ed A, C, E, & le L, e L, M, N, sono vgualmente

5. pr. 1.

5. pr. 1. K E F N

mente multiplici delle B, e B, D, F, come dunque la A alla B, così sono le A, C, E, alle B, D, F, il che si douea dimostrare. 5. d. 5.

Theor. 13. Propos. 13. Abbia la prima grandezza A alla seconda B la medesima proporzione, che la terza C alla quarta D; e la terza C abbia maggior proporzione alla quarta D, che la quinta E alla sesta F; dico, che la prima A hà maggior proporzione alla seconda B, che la quinta E alla sesta F.



PErciocche auendo la C maggior proporzione alla D, che la E alla F, se si piglieranno gli egualmente multiplici G, H, delle C, E, & altre in qualunque modo vgualmente multi-

 plici

plici *K*, L delle D, F, in modo, che la G auanzi la *K*, ma la H non auanzi la L, e quante volte la G è multiplice della C, tante volte la M sia multiplice della A; e quante volte la *K* è multiplice della D, tante volte sia multiplice la N della B; e perche come la A alla B, così è la C alla D, se la M, auan-
5. d. 5. za la N, e la G auanzerà la *K*, e se vguale, sarà vguale, se minore, minore; ma la G auanza la *K*, adunque la M auanzerà la N; ma la H non auanza la L, e sono le M, H vgualmente multiplici delle A, E, e le N, L, delle B, F, altre in qualunque modo vgualmente multiplici, onde la A auerà
5. d. 7. maggior proporzione alla B, che la E alla F, il che si douea dimostrare.

Theor. 14. Propos. 14. Abbia la prima grandezza A la medesima proporzione alla seconda B, che la terza C, alla quarta D, e sia la A maggiore della C. Dico che ancora la B sarà maggiore della D.

A B C D

PErciocche essendo l'A maggiore della C, auerà la A alla B maggiore pro-
5. pr. 8. porzione, che la C alla B; mà come la A alla B, così è la C alla D; adunque la C auerà
5. pr. 12. maggior proporzione alla D, che alla B, adunque la

B

B è maggior della D; il che si douea prouare.

Similmente dimostreremo se la A è vguale alla C, la B ancora essere vguale alla D, e se la A è minore della C, la B ancora esser minore della D.

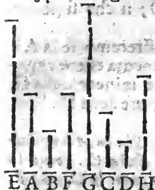
Theor. 15. Prop. 15. Sia la AB vgualmente multiplice della C, come la DE della F; dico come la C, alla F, così essere l'AB alla DE.



Imperocche diuidasi la AB in grandezze vguali alla C; che siano AG, GH, HB, e la DE diuidasi in grandezze vguali alla F, cioè DK, KL, LE, sarà la moltitudine dell'vna eguale alla moltitudine dell'altra, sarà adunque come l'AG alla Dk, cioè la C alla F, così l'AB alla DE, il che si douea prouare. 5. pr. 12.

Theor. 16. Propos. 16. Sia come A a B, così C a D, dico, che ancora permutandosi sarà come A a C, così B a D.

Piglinsi le E, F vgualmente multiplici delle A, B, e delle C, D, altre in

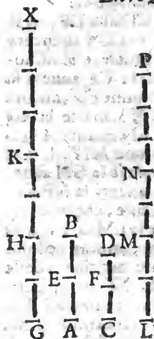


in qualunque modo vgualmẽte multiplici G, H; perche dunque la E è vgualmente multiplice della A, e la F della B, sarà come A a B, così E ad F; mà come la A alla B così è C alla D; adunque come C alla D, così E alla F; e perche le G, H, sono egualmente multiplici delle C, D, sarà come la C alla D, così la G alla H; ma come la C alla D, così la E alla F, adunque come la E alla F, così la G alla H; se adunque la E auanza la G, e la F auanzerà la H, e se vguale, vguale, se minore, minore, e sono le E, F vgualmente multiplici delle A, B, e le G, H, altre in qualunque modo vgualmente multiplici delle C, D, onde come la A alla C, così sarà la B alla D, il che si douea dimostrare.

ant. 5. pr. 11. 5. pr. 14. 5. d. 6.

Theor. 17. Propos. 17. Sia come la grandezza composta AB alla BE, così la CD, alla DF; dico ancora diuidendo essere, come la AE alla EB, così la CF alla FD.

Piglinsi delle AE, EB, CF, FD le vgualmente multiplici GH, HK, LM,



LM, MN, e delle EB, FD, altre in qualunque modo vgualmente multiplici KX, NP; Perche dunque la GH è vgualmente multiplice della AE, 5.pr.1.
& la HK della EB, sarà la GH vgualmẽte multiplice della AE, e la Gk delle AB; ma la GH è vgualmente multiplice della AE, e la LM della CF, onde la Gk è vgualmente multiplice della AB, e la 5.pr.11.
LM della CF; e perche LM è vgualmente multiplice della CF, e la MN della FD, sarà la LM vgualmente mul- 5.pr.1.
tiplice della CF, e la LN della CD; ma la LM era vgualmente multiplice della CF, e la Gk della AB; è adunque la Gk vgualmente multiplice della AB, e 5.pr.11.
la LN della CD. Oltre a ciò, perche la Hk è vgualmente multiplice della EB, e la MN della FD, e la kX vgual- 5.pr.2.
mente multiplice della EB, e la NP della FD, sarà eziandio la composta HX vgualmente multiplice della EB, e la MP della FD; ma essendo come l' 5.d.5.

AB

AB alla BE, così la CD alla DF, se la Gk auanza la HX, e la LN auanzerà la MP; e se vguale, vguale, e se minore, minore; adunque la Gk auanzi la HX, e trattane la comune Hk, ancora GH auanzerà la KX; mà se la Gk auanza la HX, e la LN auanzerà la MP, e tratta la comune MN, la LM auanzerà la NP, onde se la GH auanza la kX, e la LM auanzerà la NP; Dimostraremo similmente, che se la GH sia vguale alla kX, e la LM sarà vguale alla MP, e se minore, minore; e sono GH, LM vgualmente multiplici delle AE, CF, ed altre kX, NP in qualunque modo vgualmente multiplici del-
2. d. 5. le EB, FD; adunque sarà come la AE alla EB, così la CF alla FD, il che si douea dimostrare.

Theor. 18. Propos. 18. Sia la grandezza AE alla EB, come la CF alla FD; dico componendo essere come la AB alla BE, così la CD alla DF.

Perciocche se non è, sia come la AB alla BE, così la CD ad vn' altra, la quale sia o minore, o maggiore di DF, e questa sia DG minore; e perche come la AB alla BE, così la CD alla DG, sarà diuidendo come la AE alla EB, così
5. pro. 17.

A C I F G B D

sì la CG alla GD; ma si pone come la AE alla EB, così la CF alla FD, adunque come la CG alla GD, così è la CF alla FD; ma la prima CG è maggiore della terza CF, onde la seconda DG sarà maggiore della quarta DF, mà è minore, non è dunque come AB alla BE, così la CD alla DG. Dimostraremo parimente, che non è alla maggiore di DF, adunque è necessario, che sia la DF, il che si douea dimostrare.

5. pr. 11.

5. pr. 14.

Theor. 19. Propos. 19. Sia come tutta AB a tutta CD, così la parte AE alla parte CF, dico, che la rimanente EB è alla rimanente FD, come tutta AB a tutta CD.

A, E, B — C, F, D

PErciocche essendo come tutta AB a tutta CD, così la AE alla CF, sarà permutando, come la AB alla AE, così la CD alla CF, e diuidendo come la BE alla EA, così la DF alla FC, e di nuouo permutando, come la BE alla DF, così la EA alla FC, il che si douea dimostrare.

5. pr. 16.

5. pr. 17.

5. pr. 16.

COROLLARIO.

DA questo è chiaro, che se le grandezze composte sieno proporzio-

zionali, eziandio per la conuersione della proporzione saranno proporzionali.

Theor. 20. Prop. 20. Siano trè grandezze A, B, C, ed altre ad esse vguali di numero D, E, F prese a due a due nella medesima proporzione, e sia come la A alla B, così la D alla E; e come la B alla C, così la E alla F; ma per l'vgual proporzione sia maggiore la A della C. Dico, che la D è maggiore della F, e se vguale, vguale, se minore, minore.

A B C D E F

5.pr.8. PErciocche essendo la A maggiore della C, ed vn'altra in qualunque modo B, auerà la A maggior proporzione alla B, che la C alla B; ma come la A alla B, così
5.pr.4. la D alla E, e conuertendo, sì come la C alla B, così la F alla E; adunque ancora la D alla E hà maggior proporzione, che la F alla E; onde D è mag-
5.pr. 21. giore della F; similmente dimostreremo se la A sia vguale alla C, e la D essere vguale alla F, se minore, minore, il che bisognaua dimostrare.



Theor. 21. Prop. 21. Siano trè grandezze proporzionali A, B, C, ed altre di numero eguali a quelle D, E, F prese a due a due nella medesima proporzione, e sia la loro analogia perturbata, cioè come la A alla B, così sia la E alla F, e come la B alla C, così la D alla E, e per l'vgual proporzione la A sia maggiore della C, dico, che ancora la D è maggiore della F; e se vguale, vguale, e se minore, minore.



Perciocche essendo la A maggiore della C, ed vn'altra B, auerà la A maggior proporzione alla B, che la C alla B; ma come la A alla B, così è la E alla F, e conuertendo, come la C alla B, così la E alla D, onde la E auerà maggior proporzione alla F, che alla D, adunque la D sarà maggiore della F; similmente dimostreremo se la A sia vguale alla C, e la D essere vguale alla F, se minore, minore, il che si douea dimostrare.

5. pr. 8.

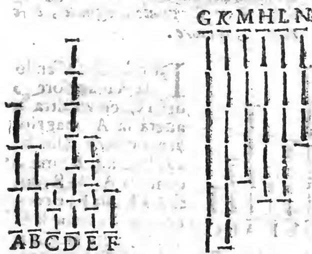
5. pr. 4.

5. pr. 10.

(o)(o)(o)
(o)(o)
(o)

Theor.

Theor. 22. Propos. 22. Siano quante grandezze si vogliano A, B, C, od altre di numero vguali a quelle D, E, F prese a due a due nella medesima proporzione, cioè come la A alla C, così essere la D alla E, e come la B alla C, così la E alla F. Dico per la proporzione vguale essere, come la A alla C, così la D alla F.



PIglinsi le G, H vgualmente multiplici delle A, D, e delle B, E, altre in qualunque modo vgualmente multiplici, K, L, e delle C, F, altre in qualsiuoglia modo vgualmente multiplici M, N; perche dunque come la A alla B, così è la D alla E; e si sono prese a G, H vgualmente multiplici delle A, D, e delle B, E, altre in qualunque modo vgual-

vgualmente multiplici *k*, L, sarà come la G alla *k*, così la H alla L; & per la medesima ragione come la *k* alla M, così la L alla N; ed essendo trè grandezze G, *k*, M, ed altre di numero vguali a quelle H, L, N prese a due a due, e nella medesima proporzione per la proporzione vguale, se la G auanza la M, e la H auanzerà la N, se vguale, vguale, se minore, minore, e sono le G, H vgualmente multiplici; onde come la A alla C, così sarà la D alla F, il che si douea dimostrare. 5.pr.4. 5.pr.20. 5.d.5.

Theor. 23. Propos. 23. Siano trè grandezze A, B, C, & altre grandezze di numero vguali a quelle prese a due a due nella medesima propozione D, E, F, e sia la loro analogia perturbata, cioè come la A alla B, così la E alla F, e come la B alla C, così la D alla E, dico, come la A alla C, così essere la D alla F.

Piglinsi le G, H, *k* vgualmente multiplici delle A, B, C, e delle D, E, F, altre in qualunque modo vgualmente multiplici L, M, N, e perche le G, H sono vgualmente multiplici delle A, B, e le parti delle multiplici nel medesimo modo hanno la medesima proporzione; sarà come la A alla B, così la G alla H, e per la medesima ragione come la E alla F, così la M alla N, ed è come 5.pr.15.

la



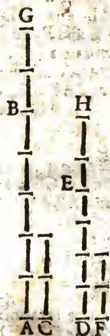
5. pr. 11. la A alla B, così la E alla F; come dunque la G alla H, così la M alla N; e perche come la B alla C, così è la D alla E, e si sono prese H, k vgualmente multiplici delle B, C, e delle D, E, altre in qualsiuoglia modo vgualmente multiplici L, M, sarà come la H alla k, così la L alla M; e si è dimostrato, che come la G alla H, così la M alla N; perche adunque le trè grandezze sono proporzionali G, H, k, ed altre di numero vguali a quelle L, M, N prese a due a due nella proporzione medesima, ed è la loro analogia perturbata, per la vgual proporzione, se la G auanza la k, la L auanzerà la N, e se è

5. pr. 21. vguale, vguale; se minore, minore; mà sono le G, k vgualmente multiplici delle A C, e le L, N, vgualmente mul-

5. d. 5. tiplici delle D, F; come dunque la A alla C, così sarà la D alla F, il che bisognaua dimostrare.

Theor.

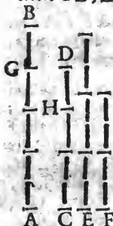
Theor. 24. Prop. 24. Abbia la prima AB alla seconda C la medesima proporzione, che la terza DE alla quarta F: ed abbia la quinta BG alla seconda C la medesima proporzione, che la sesta EH alla quarta F; dico, che composta la prima, e la quinta AG alla seconda C hà la medesima proporzione, che la terza, e la sesta DH alla quarta F.



PErciocche essendo come la BG alla C, così la EH alla F, sarà conuertendosi come la C alla BG, così la F alla EH; e perche come la AB alla C, così la DE alla F, e come la C alla BG, così la F alla E, H; sarà per la proporzione vguale come la AB alla BG, così la DE alla EH, ed essendo le grandezze diuise proporzionali, saranno ancor composte proporzionali; come dunque l'AG alla GB, così è la DH alla HE; ma come la GB alla C, così la EH alla F; adunque per l'vgual proporzione come la AG alla C, così sarà la DH alla F, il che si doueua dimostrare.

5. pr. 4.
5. pr. 22.
5. pr. 18.
5. pr. 22.

Theor. 25. Propos. 25. Siano quattro grandezze proporzionali AB, CD, E, F, e sia come la AB alla CD, così la E alla F, e sia la maggiore di tutte AB, e la minore F; dico le AB, & F insieme vnite esser maggiori delle CD, E.

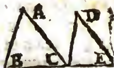


Pongasi la AG vguale alla E, e la CH vguale alla F; Perche dunque come l'AB alla CD, così la E alla F, ed è la AG vguale alla E, e la CH vguale alla F; sarà come l'AB alla CD, così la AG alla CH; e perche come tutta AB a tutta CD; così la parte tratta AG alla parte tratta CH, sarà ancor la rimanente GB alla rimanente HD, come tutta AB a tutta
5. pr. 19. CD; ed è la AB maggiore della CD; adunque la GB è maggiore della HD; ed essendo la AG vguale alla E, e la CH alla F, sarãno le AG, CH vguali alle CH, E; mà se alle cose disuguali si ag-
as. 4. giungano cose vguali, tutte saranno disuguali; adunque essendo le GB, HD disuguali, perciocche la GB è maggiore, se alla GB si aggiungano le AG, F, ed alla HD si aggiungano CH, E si faranno AB, F necessariamente maggiori delle CD, E, il che si douea dimostrare. *Fine del Quinto Libro.*

DE GLI ELEMENTI D'EVCLIDE

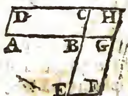
LIBRO SESTO.

DIFFINIZIONI.



1 LE figure rettilinee ſimili ſono quelle, che hanno ciaſcun angolo vguale, e d' intorno a gli angoli vguali i lati proporzionali.

Come per eſempio i due triangoli ABC, e DCE ſono ſimili, perche l'angolo A è vguale all'angolo D, l'angolo B all'angolo DCE, e l'angolo C all' angolo E; ed il lato BA al lato AC hà la medeſima ragione, che hà il lato CD al lato DE; ed il lato AB a BC, e come DC a CE; e BC a CA, come CE a ED.



2 Le figure reciproche ſono, quando i termini antecedenti, e conſequenti delle ragioni ſono nell' vna, e nell' altra figura.

Sieno i due parallelogrammi ABCD, ed EBGF; e ſia come AB antecedente, che è nel primo, a BG conſeguente, che è nel ſecondo, così EB anteceden-

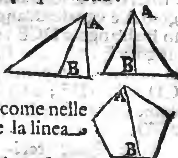
 te,

te, che è nel secondo a BC conseguente, che è nel primo. Perche in ciascuno parallelogrammo sono i termini antecedenti, e conseguenti delle ragioni, detti parallelogrammi si dicono reciprochi.

3 La linea si dice esser segata secondo l'estrema, e media proportione, quando sia come tutta la linea alla parte maggiore, così la parte maggiore alla minore.

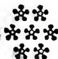
A—————C—————B

Come la linea AB tagliata in C in modo, che sia, come AB ad AC, così AC a CB, si dice tagliata secondo la estrema, e media proporzione.



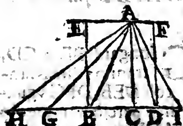
4 L'altezza di ciascuna figura è quella linea perpendicolare, che dalla cima è tirata alla base, come nelle quì poste figure la linea AB.

5 La proporzione si dice essere composta di proporzioni, quando le quantità delle proporzioni moltiplicate frà loro fanno vna certa proporzione.



Theor.

Theor. 1. Propos. 1. Sieno i triangoli ABC, & ACD, ed i parallelogrammi EC, e CF, che habbiano la medesima altezza, cioè la perpendicolare AC, ouero sieno fra le medesime parallele EAF, ed HCI; Dico, come la base BC alla base CD, così essere il triangolo ABC al triangolo ACD, ed il parallelogrammo EC al parallelogrammo CF.

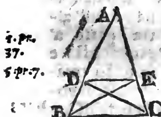


PRolunghisi BD dall' vna, e dall' altra parte a' punti HI, e pongasi quante volte si vogliano BG, GH vguali alla base BC, e DI vguale alla DC; e tirinsi le linee AG, AH, AI saranno i triangoli ACB, ABG, AGH frà di loro vguali. Perloche quante volte la base HC è multiplice della base BC, tante volte il triangolo AHC è multiplice del triangolo ABC; e per la medesima ragione, quãte volte la base CI è multiplice della base CD, tante volte il triangolo AIC è multiplice del triangolo ACD, e se HC è minore, vguale, o maggiore di CI, così il triangolo ACH sarà minore vguale, o maggiore del triangolo ACI; adunque come BC a CD, così

pos. 2. *1. pr. 3* *pos. 1.* *1. pr. 38.* *5. d. 6.*

sarà il triangolo ABC al triangolo
1.pr. ACD, ed il parallelogrammo EC al
41. parallelogrammo CF, che sono doppij
5.pr. de triangoli, il che si douea dimostra-
15. re.

Theor. 2. Prop. 2. Nel dato triangolo ABC se sarà tirata la DE parallela alla BC; Dico, che sarà come AD a DB, così AE a EC; e conuertendo se sarà come AD a DB, così AE a EC, dico che DE sarà parallela a BC.



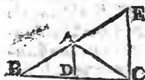
1.pr. 37. 5.pr.7. Giunganſi BE, e CD, saranno i due triangoli DEB, DEC vguali, e perciò il triangolo ADE auerà a quelli la medesima proporzione; ma il triangolo
6.pr.1. ADE al triangolo DEB, e come AD a DB, ed al triangolo DEC è come AE a EC; adunque AD a DB è come AE a EC, il che si douea primieramente dimostrare.

Sia come AD a DB, così AE a EC; Dico che DE è parallela a BC.

6.pr.1. Imperocche il triangolo ADE al triangolo DBE è come AD a DB, ed al triangolo ECD, come AE a EC; auerà dunque il triangolo ADE a' due triangoli DBE, e DEC la medesima
9.pr.7. proporzione; adunque questi saranno
vguali,

vguali, adunque saranno frà le istesse parallele, adunque DE sarà parallela a BC, il che si douea dimostrare. 1. pr. 39.

Theor. 3. Propos. 3. Del dato triangolo ABC seghisi l'angolo BAC per mezzo colla linea retta AD; Dico come il segmento BD al segmento DC, così essere il lato BA al lato AC; e se BD a DC è come BA ad AC. Dico l'angolo BAC essere segato per mezzo. 1. pr. 9.

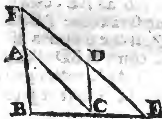


Tirisi la CE parallela alla DA, e la BA prolungata concorra con essa nel punto E, sarà l'angolo ACE vguale all' angolo alterno CAD, e per conseguenza all'angolo BAD, ed angolo AEC; perciò il lato AE sarà vguale al lato AC; adunque AB auerà la medesima proporzione ad AC, che ad AE; ma come AB ad AE, così è BD a DC; adunque sarà come AB ad AC, così BD a DC, il che si douea dimostrare. Ma sia, come la BD alla DC, così la BA alla AC, e giungasi AD; dico l'angolo BAC essere segato per mezzo. 1. pr. 31. 1. pr. 29. as. 2. 1. pr. 29. 1. pr. 6. 5. pr. 7. 6. pr. 3.

Prolonghisi BA in E in modo, che AE sia vguale ad AC, e congiungasi CE, sarà, come BD a DC, così BA ad AE; adunque CE sarà parallela ad AD, 5. pr. 7. 6. pr. 2.

1. pr. 29. e l'angolo esteriore BAD sarà vguale all'interiore, ed opposto AEC; ma questo è vguale all'angolo ACE per
1. pr. 6. essere i lati AE, ed EC vguali, e l'ango-
1. pr. 29. lo ACE è vguale all'angolo DAC; adunque l'angolo BAD sarà vguale all'angolo DAC, e così sarà l'angolo BAC diuiso per mezzo, il che si douea dimostrare.

Theor. 4. Prop. 4. Sieno i triangoli equiangoli ABC, DCE, che abbiano l'angolo ABC vguale all'angolo DCE, e l'angolo ACB all'angolo DEC, e di più l'angolo BAC all'angolo CDE. Dico che i lati che stanno d'intorno a gli angoli vguali sono proporzionali, ed i lati homologhi esser quelli, che si sottopongono a gli angoli vguali; cioè essere come AB a BC, così DC a CE, e come BC a CA, così CE ad ED, e come AB a CA, così DC ad ED.



Pongasi la BC per diritto alla CE. Perche gli ãgoli ABC,
1. pr. 17. ACB sono minori di due retti, e l'angolo ACB è vguale all'angolo DEC, saranno gli angoli ABC, DEC minori di due retti. Perciò le BA, ED se si prolun-

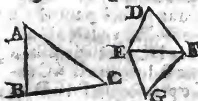
ghe-

gheranno s'vniranno nel punto F; e *pos. 5.*
perche l'angolo DCE è vguale all'an-
golo ABC, sarà la DC parallela alla *1. pr. 28.*
BF; Similmente si dimostra la AC pa-
rallela alla FE, e perciò sarà FACD vn *1. pr.*
parallelogrammo, ed FA sarà vguale *34.*
alla CD, ed AC alla FD; e sarà come
BA ad FA, cioè CD, così BC a CE; *6.pr.2.*
e permutando, come AB a BC, così
CD a CE; Et perche CD è parallela a *5. pr. 16.*
BF, sarà come BC a CE, così FD, cioè
AC a DE; e permutando come BC ad *6.pr.2.*
AC, così CE ad ED; Adunque come *5.pr.*
AB a BC, così DC a CE, & come BC *16.*
a CA, così CE ad ED, sarà per la vgual
proporzione come AB a CA, così DC *5. pr. 22.*
ad ED, il che si douea dimostrare.

Theor. 5. Propos. 5. Sieno i due triangoli ABC, DEF, che abbiano i lati proporzionali; cioè sia come AB a BC, così DE ad EF, e come BC a CA, così EF ad FD, e come BA ad AC, così ED a DF; Dico il triangolo ABC esser equiangolo al triangolo DEF, ed auere vguali quegli angoli, a quali si sottopongono i lati homologhi, cioè l'angolo ABC all'angolo DEF, e l'angolo BCA all'angolo EFD, e l'angolo BAC all'angolo EDF.

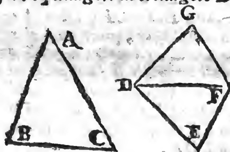
SI faccia sopra la linea retta EF l'angolo FEG vguale all'angolo ABC,

1. pr. 23.



e l'angolo EFG all'angolo BCA, sarà il triangolo ABC equiangolo al triangolo EGF; sarà dunque come
6. pr. 4. AB a BC, cioè DE ad EF, così GE ad
5 pr. 9. EF; adunque DE è vguale alla GE; e per la medesima ragione DF sarà vguale alla FG; ed essendo la EF comune, sarà il triangolo DEF vguale al triangolo EGF; e perciò equiangolo
1. pr. 8. al triangolo ABC, il che si douea dimostrare.

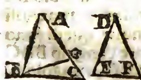
Theor. 6. Propos. 6. Se i due triangoli ABC, e DEF abbiano vn'angolo BAC vguale ad vn'angolo FDE; ed i lati intorno detti angoli proporzionali, cioè sia come BA ad AC, così ED ad EF; Dico il triangolo ABC essere equiangolo al triangolo DEF.



1. pr. 23. Pongasi nella retta linea DF l'angolo FDG vguale ad vno de gli an-

angoli BAC, EDF; e l'angolo DFG all'angolo ACB; adunque il rimanente B è vguale al rimanente G, ed il triangolo ABC è equiangolo al triangolo DGF; e perciò come BA ad AC, così è GD a DF; ma come BA, ad AC, 6.pr.4.
così è ED a DF; adunque ED è vguale 5.pr.9.
le a DG, e DF commune; adunque la 1.pr.4.
base EF è vguale alla base FG, ed il triangolo DEF vguale al triangolo GDF; ma questo è equiangolo al triangolo ABC; adunque il triangolo DEF è equiangolo al triangolo ABC, il che si douea dimostrare.

Theor. 7. Propos. 7. Sieno due triangoli ABC, e DEF, che abbiano l'angolo BAC vguale all'angolo EDF, e come AB a BC, così sia DE ad EF; e de' rimanenti angoli, che sono a' punti C, & F, sia l'vno, e l'altro, o minore, od vguale, o maggiore del retto; Dico il triangolo ABC essere equiangolo al triangolo DEF.



SE non è, facciasi 1.pr.
l'angolo ABG v- 23.
guale all' angolo
DEF; sarà il trian- 1.pr.
golo ABG equian- 32.
golo al triangolo DEF, e l'angolo BGA vguale all'angolo F, ed AB a BG sarà come DE ad EF; ma come DE ad EF, 6.pr.4.
così è AB a BC; adunque AB a BG è 5.pr.
11.

come AB a BC, e BC farà vguale a BG,
5.pr.9. e l'angolo BGC vguale all'angolo
1.pr.5. BCG; ma se l'angolo C si pone mino-
as. 1. re del retto, adunque ancora BGC farà
minore del retto, ed i due angoli BGA,
che è vguale ad F, e BGC insieme sa-
1.pr. 15. ranno minori di due retti per la suppo-
sizione, e se maggiore maggiori, il che
è impossibile; essendo ancora impos-
1.pr. 17. sibile che siano vguali a due retti; gl'
angoli BGC, e BCG; adunque è impos-
sibile, che 'l triangolo ABC non sia
equiangolo al triangolo DEF, il che si
douea dimostrare.

Theor. 8. Prop. 8. Sia dato vn triangolo, che abbia l'angolo BAC retto, dal quale cada nella base la perpendicolare AD; Dico i triangoli ADB, ADC, & ABC essere equiangoli.

as. 12.



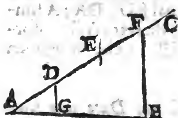
L'Angolo BAC è vguale all'angolo ADB, l'angolo B è comune a' triangoli
ABC, ed ABD, adunque questi sono
1.pr. 32. equiangoli. Similmente l'angolo BAC
è vguale all' angolo ADC, l'angolo C
è comune a' triangnli ABC, ed ADC;
as. 1. adunque questi sono equiangoli: adun-
que i trè triangoli ADB, ADC, ed ABC
sono equiangoli, il che si douea dimo-
strare.

CO-

COROLLARIO.

DA quì si raccoglie essere, come BD a DA, così DA ad AC, e come BC a BA, così BA a BD, e come BC a CA, così CA a CD. 6.pr.4.

Probl. 1. Propos. 9. Dalla data linea retta AB tagliare vna parte proposta, per essempio la parte terza.

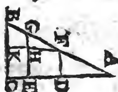


TIrisi dal punto A la linea retta AC, la quale con AB faccia qual si voglia angolo; e piglisi nella AC qualunque punto D, e ponganfi DE, EF vguali alla AD, poi giungasi BF, e per D tirisi la DG parallela alla FB; Dico AG essere la parte ricercata. 1.pr.31.

Perche FA ad AD è come BA ad AG, ma AD è la parte proposta di FA; adunque ancora AG sarà la parte proposta di AB, il che si douea fare. 6.pr.2.

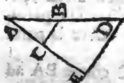
Probl. 2. Propos. 10. Segare la linea retta data AC conforme è segata la retta AB ne' punti F, G.

POnganfi le linee AC, ed AB in mo-



pos. 1. do, che contengano qual si voglia angolo, e congiunta la CB da' punti, F, G, tirinsi le FD, GE parallele alla CB, e per
1. pr. 31. F tirisi la FHk parallela alla AC; Adūque DH, ed HC saranno parallelogrāmi; e però FH è vguale alla DE, ed Hk
6. pr. 2. alla EC, e nel triangolo FKB, sarà come BG a GF, così KH ad HF, cioè CE ad ED; E nel triangolo AEG sarà come GF a FA, così ED a DA; Adunque si è segata la data retta AC conforme alla segata AB, il che bisognaua fare.

Probl. 3. Propos. 11. Date due linee rette AB, ed AC ritrouare la terza proporzionale.



Ponganſi in modo, che contengano qualsiuoglia angolo, e prolunghisi la AB sino in D, in modo, che BD sia vguale alla AC, e giunta la BC tirisi per D la DE parallela alla BC,
1. pr. 31. che tagli la AC prolungata in E. Sarà come AB a BD, cioè ad AC, così AC
6. pr. 2. alla CE, il che bisognaua fare.

***

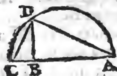
Probl.

Probl. 4. Prop. 12. Date trè linee rette A, B, C ritrouare la quarta proporzionale.



POnganfi le due rette DE, DF, che contengano qualsiuoglia angolo EDF, e pongafi DG vguale ad A, e GE vguale a B, e DH vguale a C, e giunta GH fi tiri a quella la parallela EF. Sarà come la DG, cioè A alla GE, cioè B, così la DH, cioè C alla HF, il che bifognaua fare. 1. pr. 31. 6. pr. 2.

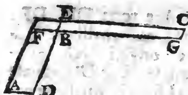
Probl. 5. Propof. 13. Date due linee rette AB, e BC ritrouare frà quelle vna media proporzionale.



POnganfi le date rette per diritto, e fopra l'AC defcriuafi il mezzo cerchio ADC, e dal punto B s'alzi la perpendicolare BD; Dico quefta effere la media ricercata. Giunganfi AD, DC, farà l'angolo ADC retto, e DB farà media proporzionale frà le rette AB, e BC, il che fi douea fare. 1. pr. 11. 3. pr. 31. 6. pr. 8. cor.

Theor.

Theor. 9. Prop. 14. Siano vguali i parallelogrammi AB, e BC, e gli angoli al punto B vguali, e poste per diritto le DB, e BE saranno ancora
1. pr. 15. *per diritto FB, BG. Dico queste auere intorno a gli angoli vguali i lati reciprocamente proporzionali, cioè essere come DB a BE, così GB, a BF.*



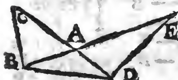
Compiscasi il parallelogrãmo FE; gli vguali parallelogrammi AB, e BC aueranno al me-
5. pr. 7. desimo FE la medesima proporzione.
6. pr. 1. Ma AB ad FE è come DB à BE, e BC à FE, e come BG a BF, adunque come
5. pr. 11. DB a BE, così è BG a BF, il che si douea dimostrare.

Ma sia come DB a BE, così BG a BF; dico essere il parallelogrammo AB vguale al parallelogrammo BC.

Imperocche conuertendo sarà BE a
5. pr. 4. DB, come BF a BG, ma come BE a
6. pr. 1. DB, così è il parallelogrammo EF al parallelogrammo AB, è come BF a GB; così è il parallelogrammo EF al sudetto parallelogrammo BC; adunque FE ad AB auerà la medesima proporzione, che a BC; adunque AB sarà vguale a BC, il che si douea dimostrare.

Theor.

Theor. 10. Prop. 15. Siano i triangoli vguali ABC, ed ADE, che abbiano l' angolo BAC vguale all' angolo DAE. Dico i lati, che sono intorno a gli angoli vguali risponderſi reciprocamente, cioè eſſere come CA ad AD, così EA ad AB.



POnganſi di modo, che CA ſia per diritto ad AD, ancora EA sarà per diritto ad AB, e giungaſi BD. I triangoli eguali ABC, ed ADE hanno al medeſimo BAD l'iſteſſa proporzione; ma ſono come CA ad AD, ed EA ad AB; adunque come CA ad AD, così EA ad AB, il che ſi douea dimoſtrare. 1.pr.14. 5.pr.7. 6.pr.1. 5.pr.11.

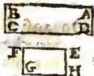
Dico di più che ſe ſarà come CA ad AD, così EA ad AB, che'l triangolo BAC è vguale al triangolo EAD.

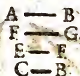
Imperocche conuertendo ſarà AD a CA, come AB ad AE; ma come AD a CA, così il triangolo BAD al triangolo BAC; e come AB ad AE, così il medeſimo triangolo BAD al triangolo DAE; adunque il triangolo BAD auerà a' triangoli BAC, & DAE la medeſima proporzione; adunque i triangoli BAC, e DAE ſono vguali, il che ſi douea dimoſtrare. 5.pr.4. 6.pr.1. 5.pr.11. 5.pr.7.

Theor.

Theor. 11. Propos. 16. Sia come la retta linea AB alla FG, così la EF alla CB. Dico che 'l rettangolo AC fatto dalla prima AB nella quarta CB è vguale al rettangolo EG fatto dalla seconda FG nella terza EF.

6. pr. 14.





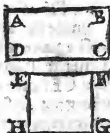
PErche l'angolo B è vguale all'angolo F, e come AB a FG, così EF a CB; sarà il rettangolo AC vguale al rettangolo EG, il che si douea dimostrare.

Dico di più, che se il rettangolo AC è vguale al rettangolo EG per esser l'
6. pr. 14. *angolo ABC vguale all' angolo EFG sarà come AB ad FG, così EF a CB.*

Theor. 12. Prop. 17. Siano date tre linee rette continuamente proporzionali, cioè sia AB ad EF come EF a CB; Dico, che 'l rettangolo AC fatto dalle estreme AB, e CB è vguale al quadrato EG fatto dalla media EF.

1. pr. 3. FAcciasi FG vguale alla EF, sarà come AB a EF, così FG a CB;
6. pr. 14. adunque il rettangolo di AB in CB sarà vguale al rettangolo di EF in FG,
1. d. 29 cioè al quadrato di EF.

Di-



Dico di più, che se il rettangolo AC è vguale al quadrato EG, sarà AB ad EF come EF a BC.

Imperocche per essere EG quadrato è EF vguale a FG, e per essere il rettangolo AC vguale al quadrato EG, e l'angolo ABC vguale all'angolo EFG per esser retti, sarà come AB ad EF, così FG, ouero la sua vguale EF a BC, il che si douea dimostrare. 1. d 29 as. 12. 6. pr. 14.

Probl. 6. Prop. 18. *Sopra la data retta AB formare vn rettilineo simile al dato rettilineo CEFD, ed AB sia Omologa a CD.*



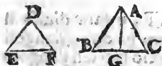
Tirisi la retta CF, e sarà diuiso il dato rettilineo in due triangoli CFE, e CFD, perciò facciasi l'angolo ABH vguale all'angolo D, e l'angolo BAH all'angolo DCF, sarà l'angolo 1. pr. 23.

AHB

1. cor. AHB vguale all'angolo CFD. Facciasi
pr. 32. di più l'angolo AHG vguale all'angolo CFE, e l'angolo HAG vguale all'angolo FCE, sarà parimente l'angolo
1. cor. pr. 32. AGH vguale all'angolo CEF, ed il triangolo ABH sarà equiangolo, e simile al triangolo CDF; similmente il trian-
6. pr. 4. golo AHG sarà equiangolo, e simile al triangolo CFE; adunque come AB a
6. pr. 4. BH, così CD a DF, e come AG a GH così CE a EF, e come AG ad AH, così
5. pr. 22. CE a CF, e come AH a AB, così CF a CD, e come AG ad AB, così CE a CD,
6. d. 1. e come GH a HB, così EF a FD. Adunque il rettilineo ABHG è simile al rettilineo CDFE, ed AB è omologa a CF, il che si douea dimostrare.

Theor. 13. Prop. 19. Sieno i triangoli ABC, e DEF simili, che abbiano l'angolo B vguale all'angolo E, e sia come la AB alla BC, così la DE alla EF; di modo che il lato BC sia omologo al lato EF; Dico il triangolo ABC auere al triangolo DEF doppia proporzione di quella, che hà la BC alla EF.

6. pr. 11.

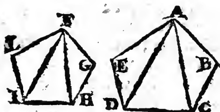


FAcciasi come BC ad EF, così la EF alla BG, e giungasi GA; Perche come AB a BC, così è DE alla EF, sarà

rà permutando, come AB a DE, così 5. pr.
BC ad EF, ma come BC ad EF, così è 16.
EF a BG, adunque come AB a DE,
così è EF a BG; adunque il triangolo
ABG è vguale al triangolo DEF; e per- 6. pr.
che come BC ad EF, così EF alla BG, 15.
auerà BC alla BG doppia proporzione 5. d. 10
di quella che hà la BC alla EF, ed è il 6. pr. 1.
triangolo ABG vguale al triangolo
DEF, ed il triangolo ABC al triangolo
ABG è come BC a BG, adunque il
triangolo ABC al triangolo ABG, cioè
al suo eguale DEF hà doppia proporzione di quella, che hà BC a EF, il che
si douea dimostrare.

Theor. 14. Propos. 20. Sia il polygono ABCDE simile al polygono FGHIL. Dico diuidersi in triangoli simili, cioè il triangolo ABC esser simile al triangolo FGH, ed il triangolo ACD esser simile al triangolo FHI, ed il triangolo ADE simile al triangolo FIL, e come ciascun triangolo al suo simile, così essere il polygono al polygono; e perche il triangolo ABC al triangolo FGH hà doppia proporzione del lato AB al lato FG. Dico, che similmente il polygono ABCDE al polygono FGHIL hà doppia proporzione del lato AB al lato FG.

Per-



6. d.1. PErche l'angolo B è vguale all'angolo G, e come AB a BC, così FG a GH, saranno gli altri angoli vguali a
6.pr.6. gli altri angoli, ed il triangolo ABC sarà simile al triangolo FGH, similmente si prouerà simile il triangolo AED al triangolo FLI, ed il triangolo ACD sarà simile al triangolo FHI, per essere l'angolo ACD vguale all'angolo FHI, mentre degli vguali BCD, GHI sono stati leuati gli eguali BCA, e GHF, e similmente l'angolo ADC vguale all'angolo FIH; Di modo, che tutti i triangoli saranno simili a tutti i triangoli, e come AB a FG, così è AC ad FH,
6 pr.4. ed AD ad FI; ma il triangolo ABC al triangolo FGH hà doppia proporzione del lato AB al lato FG, cioè del lato
6. pr. 19. AC al lato FH, cioè del lato AD al lato FI; Ma l'istessa ragione hà il trian-
5. pr. 12. golo ACD al triangolo FHI, ed il triangolo AED al triangolo FLI; adunque tutti i triangoli a tutti i triangoli, cioè il polygono ABCDE al polygono FGHIL, sarà come vn triangolo ABC al triangolo FG, cioè auerà doppia proporzione del lato AB al lato FG, il che si doueа dimostrare.

CO-

COROLLARIO.

DA quì si raccoglie, che se trè linee rette siano proporzionali, come la prima alla terza, così essere la figura fatta dalla prima alla figura fatta dalla seconda simile, e similmente descritta.

Theor. 15. Propos. 21. Sia l'vno, e l'altro de' rettilinei A, B simile al rettilineo C, dico il rettilineo A esser simile al rettilineo B.



IMperocche essendo i rettilinei A, e B simili al rettilineo C saranno equiangoli, ed aueranno i lati proporzionali intorno a gli angoli vguali, perciò saranno simili ancora frà di loro, il che si douea dimostrare. 6. d. 1.

Theor. 16. Prop. 22. Come AB a CD, così sia EF a GH, e la figura ABI fatta sopra AB sia simile alla figura CDK fatta sopra CD: e la figura EFML fatta sopra EF sia simile alla GHON fatta sopra GH. Dico la figura ABI alla figura CDK essere, come la figura EM alla figura GO.

Per-



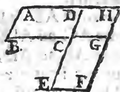
6. pr. 19. PErche la figura ABI alla figura CDK hà doppia proporzione di AB a CD, cioè di EF a GH, e la figura EM alla figura GO, hà similmente doppia proporzione di EF a GH. Sarà
5. pr. 11. ABI a CDK, come EM a GO. Il che si douea dimostrare.

Dico di più, che se sarà la figura ABI alla figura CDK, come la figura EM alla figura GO, sarà AB a CD come EF a GH.

Perche ABI a CDK, è come EM a GO, e ABI a CDk hà doppia propor-
6. pr. 19. zione di AB a CD, adunque EM a GO hà doppia proporzione di AB a CD, ma EM a GO hà doppia proporzione
5. pr. 11. di EF a GH; adunque AB a CD è come EF a GH, il che si douea prouare.

Theor. 17. Propos. 23. Sieno i parallelogrammi equiangoli AC, e CF, che abbiano l'angolo BCD vguale all'angolo ECG. Dico auere frà di loro la proporzione composta da' lati, cioè dalla proporzione, che hà il lato BC al lato CG, ed il lato DC al lato CE.

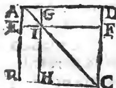
Pon-



POngasi la BC per diritto alla CG, sarà ancora la DC per diritto alla CE, e compiscasi il parallelogrammo DG; la proporzione del parallelogrammo AC al parallelogrammo CF, è composta dalla proporzione del parallelogrammo AC al parallelogrammo CH, e del parallelogrãmo CH al parallelogrãmo CF: Ma AC a CH è come BC a CG, e CH a CF è come DC a CE. Adunque la proporzione di AC a CF è composta dalla proporzione del lato BC a CG, e DC a CE.

1. pr. 14.
5. d. 20
6. pr. 1.
5. pr. 23.

Theor. 18. Propos. 24. Nel parallelogrammo ABCD sia tirato il diametro AC, circa il quale siano i parallelogrammi EG, ed HF. Dico, che i parallelogrammi EG, HF, e BD sono simili frà di loro.



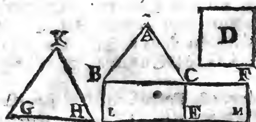
PErche EF è parallela a BC, e GIH ad AB, e l'angolo EIG vguale all'angolo HIF, saranno i parallelogrammi EG, HF, e BD equiangoli frà di loro, ed i triangoli ABC, ed AEI, ed IHC sono equiangoli, come ancora i triangoli ADC, ed AGI, ed IFC; adunque AE ad EI è come

1. pr. 15.
1. pr. 29. & 34.
6. pr. 4.

AB

AB a BC, ed AE ad AI, come AB, ad AC, ed AI ad AG, come AC ad AD,
5. pr. 22. adunque AE ad AG, come AB, ad AD, e così seguitando; adunque i parallelogrammi EG, BD, ed HF sono simili,
6. d. 1. il che si douea prouare.

Probl. 7. Propos. 25. Constituire vn rettilineo simile al rettilineo dato ABC, ed vguale al rettilineo dato D.



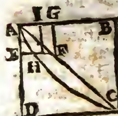
Alla linea BC s'addatti il parallelogrammo BE vguale al rettili-
1. pr. 44. neo ABC, ed alla retta CE s'adatti il parallelogrammo CM vguale al rettilineo D, nell'angolo vguale all'angolo
1. pr. 14. CBL, adunque la BC è per diritto alla CF, & la LE alla EM. Piglisi trà le BC, e CF la proporzionale di mezzo
6. pr. 13. GH, con la quale si descriua il rettilineo GKH simile, e similmente posto al rettilineo ABC; sarà come BC a CF il
6. cor. pr. 20. rettilineo ABC al rettilineo KGH: ma come BC a CF, così il parallelogrammo BE al parallelogrammo EF, adunque come il rettilineo ABC al rettili-

neo

neo kGH, così il parallelogrammo BE, al parallelogrammo EF, e permutandosi come il rettilineo ABC al parallelogrammo BE, così il rettilineo kGH al parallelogrammo EF; ma il rettilineo ABC è vguale al parallelogrammo BE; adunque il rettilineo kGH è vguale al parallelogrammo EF, cioè al rettilineo D, & simile al rettilineo ABC, il che si douea fare.

5. pr. 16.

Theor. 19. Propos. 26. Dal parallelogrammo ABCD traggasi il parallelogrammo AGFE, simile allo ABCD, e similmente posto, e che abbia l'angolo DAB comune con esso; Dico, che amendue saranno interno al medesimo diametro AFC.

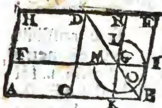


SIA se è possibile il loro diametro AHC, e tirisi la HI parallela alla AE, sarà il parallelogrammo AEHI simile al parallelogrammo ABCD; ma a questo si suppone, che AEFG sia simile, adunque come AE ad EH, così sarà AD a DC, e come AD a DC, così AE ad EF; adunque come AE ad EH, così sarà AE ad EF, adunque EH sarà vguale ad EF la parte al tutto, il che è impossibile; sarà addunque impossibile, che AFC non sia

1. pr. 31. 6. pr. 24. 6. d. 1. 5. pr. 11. as. 9.

il comune diametro, il che si douea dimostrare.

Theor. 20. Prop. 27. Sia la linea retta AB tagliata per mezzo in C, alla quale sia adattato il parallelogrammo AD, che manchi della figura parallelogramma DB simile, e similmente posta a quella, che è descritta dalla metà di AB: cioè dalla CB. Dico de' parallelogrammi adattati alla linea retta AB, che mancano di figure parallelogramme simili, e similmente poste alla DB, il maggiore di tutti essere il parallelogrammo AD.



DEscriuasi dalla linea retta CB qual si uoglia parallelogrammo DB, e compiscasi tutto il parallelogrammo ABEH. Sia di più adattato alla linea retta AB vn'altro parallelogrammo AG, che manchi della figura parallelogramma GB simile, e similmente posta alla DB. Dico il parallelogrãmo AD addattato alla metà essere maggiore del parallelogrammo AG.

Percioche essendo il parallelogrãmo DB simile al parallelogrammo GB, sarà d'intorno al medesimo diametro, il qua- 6. pr. 26.

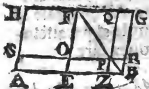
le

le sia DB, e descriuasi la figura. Perche il parallelogrammo CG è vguale al suo complemento GE, pongasi comune lo GB, adunque tutto CI è vguale a tutto KE; ma CI è vguale a CF, adunque questo sarà vguale al parallelogrammo EK; pongasi CG comune, sarà AG vguale al gnomone LOM; perciò DB, cioè AD è maggiore del parallelogrāmo AG, il che si douea prouare.

1. pr. 43.

1. pr. 36.

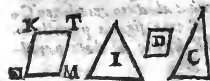
Probl. 8. Propos. 28. Sia data la linea retta AB, alla quale bisogna adattare vn parallelogrammo AP vguale al dato rettilineo C, che manchi d'vn parallelogrammo ZR simile al dato D; ma per l'antecedente bisogna, che'l parallelogrammo vguale al dato rettilineo C non sia maggiore di quello, che si adatta alla metà.



SEghisi per mezzo la AB nel punto E, e sopra la metà EB si faccia il parallelogrammo EG simile al dato D, e si tiri il diametro FB, e si perfezioni tutto il parallelogrammo ABGH. Perche si è

1. pr. 10.

6. pr. 18.

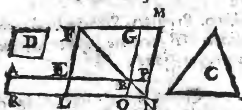


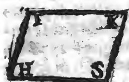
è detto, che 'l parallelogrammo vguale al rettilineo C non dee essere maggiore del parallelogrammo AF, ouero EG, se sarà vguale sarà fatto, e sarà il parallelogrammo AF; ma se sarà minore, sia la differenza vguale al rettilineo I, al quale si faccia vguale il parallelogrammo NT, e simile al dato
6.pr. 25. D. Pongasi FO vguale a KN, & FQ a
1.pr.3. KT, e fatto il parallelogrammo FOPQ,
1.pr. 31. per lo punto P tirisi la SOR parallela alla AB, e ZPQ parallela ad EF; dico AP essere il parallelogrāmo ricercato.

Perche i parallelogrammi D, EG,
6.pr. 24. OQ, ZR, NT, sono simili frà di loro, ed il parallelogrammo EG è vguale al parallelogrammo NT, più lo spazio C, & OQ è vguale a NT, sarà il gno-
as. 3. mone OBQ vguale a C, ed il parallelogrammo AO è vguale ad ER, ouero
1.pr. 36. ZG, se si aggiunge EP comune, sarà il gnomone OBQ vguale al parallelo-
as. 2. grammo AP; adunque AP è vguale al rettilineo C, & ZR simile al parallelogrammo D, il che si douea fare.

Probl. 9. Propos. 29. Adattare alla data retta linea AB il parallelogrammo AN vguale al dato rettilineo C, che ecceda d'vna figura parallelogramma OP simile al dato parallelogrammo D.

Di-





Diuidasi AB per mezzo in E, e sopra EB si faccia il parallelogrãmo EG simile al dato parallelogrammo D, ed al parallelogrammo EG con di più il rettilineo C si faccia vguale il parallelogrammo HK, e simile al dato parallelogrammo D, ouero EG. Producasi FE in L sino, che sia vguale ad IH, & FGM vguale ad IK, e tirisi RLN parallela ad FM, ed MN, & AR parallela a FL, ed AB si prolunghi in P, e GB in O, e FB in N; Dico AN essere il parallelogrammo ricercato. Imperocche sono fatti simili frà di loro i parallelogrammi D, EG, HK, ed LM è simile, ed vguale ad HK, cioè ad EG più C; adũque prorogato il diametro FB in N sarà vna linea retta, e perciò sarà OP simile ad EG, cioè a D; ma essendo LM vguale ad HK, cioè ad EG, più C, sottrattone il comune EG, sarà il gnomone ENG vguale a C; ma AL è vguale ad LB, cioè a BM; adunque AN è vguale al gnomone ENG, cioè al rettilineo C, il che si douea dimostrare.

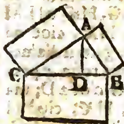
1. pr. 10. *6. pr. 18.* *6. pr. 25.* *1. pr. 3.* *1. pr. 31.* *6. pr. 26.* *6. pr. 24.* *as. 1.* *1. pr. 36.*

Probl. 10. Prop. 30. Segare la data rettalinea AB secondo l'estrema, e mezza proporzione.

A C B

SEghisi la data AB nel punto C di modo, che 'l rettangolo contenuto da tutta l'AB, ed il minor segmento
2. pr. 11. BC sia vguale al quadrato del maggior segmento AC, sarà come BA alla AC,
6. pr. 17. così AC alla CB, onde la rettalinea AB è segata secondo l'estrema, e mezza proporzione, il che bisognaua fare.

Theor. 21. Propos. 31. Sia il triangolo rettangolo ABC; dico che la figura, che si fà del lato BC opposto all'angolo retto è vguale a quelle, che si fanno da i lati BA, AC simili, e similmente descritte.



6. pr. 20. PErche le figure simili sono in doppia proporzione de lati omologi, la figura che si fà dal lato BC a quella, che si fà dal lato BA auerà doppia proporzione di quella che hà BC a BA, ed il quadrato di BC al quadrato di BA hà doppia proporzione di quella, che hà BC a BA; come dunque la figura di BC a quella

quella di BA, così il quadrato di BC al quadrato di BA, e per la medesima ragione, come la figura di BC a quella di CA, così il quadrato di BC al quadrato di CA; adunque come la figura di BC à quelle di BA, AC, così il quadrato BC a' quadrati di BA, AC; mà il quadrato di BC è vguale a' quadrati di BA, AC, onde la figura che si fà da BC è vguale à quelle, che si fanno da BA, AC simili, e similmente descritte, il che bisognaua dimostrare. 5.pr.12. 1.pr.47.

Theor. 22. Propos.32. *Sieno due triangoli ABC, DCE, che abbiano due lati BA, AC proporzionali a' due lati CD, DE, e sia come BA, ad AC, così CD a DE, e l'AB sia parallela alla DC, & l'AC alla DE; dico la BC esser per diritto alla CE.*



PErciocche essendo la AB parallela alla DC, e cadendo in essa la linea retta AC saranno gli angoli alterni BAC, ACD frà loro vguali, e per la medesima ragione l'angolo CDE è vguale all'angolo ACD, onde BAC è vguale a CDE; e perche sono due triangoli ABC, DCE, che hanno vn' angolo A vguale ad vn' angolo D, ed intorno a gli angoli vguali i lati proporzionali, sarà il triangolo ABC equiangolo al triangolo DCE, adunque l'angolo ABC è vguale all'angolo DCE, 1 pr.29. as.1. 6.pr.6.

ed è dimostrato l'angolo ACD vguale all'angolo BAC, perciò tutto ACE è vguale a' due ABC,BAC, pongasi l'an-
1.pr. 32. golo ACB comune, gli angoli dunque ACE, ACB sono vguali a gli angoli BAC, ACB, CBA, cioè a due retti;
1.pr. 14. adunque la linea BC sarà per diritto alla linea CE, il che si douea dimostrare.

Theor. 23. Propos. 33. Sia il circolo ABC, di cui è centro G, vguale al circolo DEF, di cui è centro H, & a' loro centri siano gli angoli BGC, ed EHF, ed alle circonferenze gli angoli BAC, ed EDF, dico come la circonferenza BC alla circonferenza EF, così essere l'angolo BGC all'angolo EHF, e l'angolo BAC all'angolo EDF, ed il settore ancora BGC al settore EHF.





POnganſi quante ſi vogliano circonferenze CK, KL vguali alla BC, e ſimilmente quante ſi vogliano circonferenze FM,MN vguali alla EF, e giunganſi GK, GL, HM, HN; perche dunque le circonferenze BC, CK, KL,

KL, sono frà loro vguali, saranno altresì gli angoli BGC, CGK, KGL 3.pr.
vguali frà loro, adunque quante volte 27.
la circonferenza LB è multiplice della circonferenza BC, tante volte l'angolo BGL è multiplice dell'angolo BGC; per la medesima ragione quante volte la circonferenza NE è multiplice della circonferenza EF, tante volte l'angolo EHN è multiplice dell'angolo EHF; se dunque la circonferenza BL è vguale alla circonferenza EN, e l'angolo BGL sarà vguale all'angolo EHN, e se maggiore, maggiore, e se minore, minore; onde come la circonferenza BC 5.d.5.
alla circonferenza EF, così è l'angolo 3.pr.
BGC all'angolo EHF, e l'angolo BAC 20.
all'angolo EDF, essendo ciascuno me- 5.pr.
tà di ciascuno. Dico oltre a ciò, come 15.
la circonferenza BC alla circonferenza EF, così essere il settore GBC al settore HEF. Giunganſi BC, CK, e presi nelle circonferenze BC, CK i punti X, O; congionganſi BX, XC, CO, OK, e perche le BG, GC sono vguali alle due CG, GK, e contengono gli angoli vguali, sarà ancora la base BC vguale 1.pr.4.
alla base CK, onde il triangolo GBC è vguale al triangolo GCK; e perche la circonferenza BC è vguale alla circonferenza CK, eziandio il rimanente 3.pr.
della circonferenza, che compisce il 27.
cerchio sarà vguale al rimanente, adun- 3.pr.
que ancor l'angolo BXC è vguale all' 24.
an-

3.d.11 angolo COK, e la porzione BXC è simile alla porzione COK, e sono nelle
3 pr. vguali linee, adunque sono frà loro
24. vguali; tutto dunque il settore BGC sarà vguale à tutto il settore CGK; e per la medesima ragione i trè settori BGC, CGK, KGL sono frà loro vguali, e parimente i settori HEF, HFN, HMN sono vguali frà loro; quante volte adunque la circonferenza LB è multiplice della circonferenza CB, tante volte il settore GBL è multiplice del settore GBC; per la medesima ragione quante volte la circonferenza NE è multiplice della circonferenza EF, tante volte il settore HEN è multiplice del settore HEF, e perciò se la circonferenza BL è vguale alle circonferenza EN, ed il settore BGL è vguale al settore EHN, e se maggiore, maggiore, e se minore, minore; adunque come la circonferenza BC alla circonferenza
5. d.5. EF, così è il settore BGC al settore EHF, il che bisognaua dimostrare.

COROLLARIO.

QVindi è manifesto come il settore al settore, così essere l'angolo all' angolo.



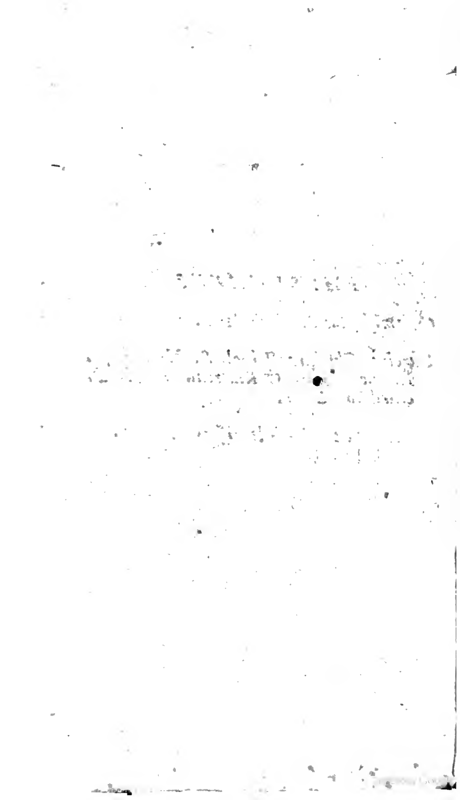
Il fine del Sesto Libro d'Euclide.

IMPRIMATVR.

Commissarius S. Officij Mediolani.

Carolus Ghieldus Theol. S. Nazarij pro Eminentissimo, & Reuerendissimo D. D. Cardinali Litta.

F. Arbona pro Excellentissimo Senatu.





IN MILANO,

Nella Stampa di Lodouico Monza.
MDCLXXI.

Con licenza de' Superiori.

